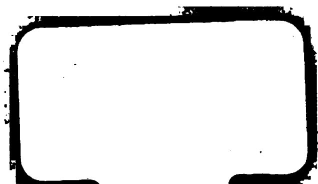
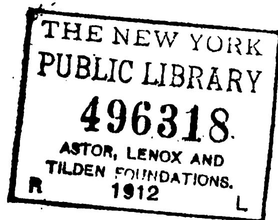






Holzschnitte
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Anfangsgründe

der

geometrischen Disciplinen

für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen,

sowie auch

zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

In drei Theilen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Erster Theil:

Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1860.

Elemente

der

ebenen Geometrie und Stereometrie.

Für

Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

Mit 141 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 6 0.

Vorrede.

Ein gründliches Studium der Naturwissenschaften, namentlich aber der Physik, ist, wie wohl allgemein anerkannt wird, ohne mathematische Vorkenntnisse ganz unmöglich, und von mancher Seite her hört man deshalb auch den Mangel derselben bitter beklagen. Da nun aber doch die Mathematik fast auf allen höheren Schulanstalten Deutschlands einen wesentlichen Theil des Lectionsplanes bildet, so kann der verhältnißmäßig geringe Erfolg des mathematischen Unterrichtes kaum in etwas Anderem gesucht werden, als in der unzweckmäßigen Art, wie derselbe häufig ertheilt wird.

Der Vortrag der mathematischen Disciplinen wird nämlich vielfach allzu abstract gehalten, was die nachtheilige Folge hat, daß er nicht nur für die Naturwissenschaften vollkommen unfruchtbar bleibt, sondern daß er auch bei den Schülern eine meist schwer zu überwindende Abneigung gegen das mathematische Studium hervorruft.

Auffallender Weise treffen diese Vorwürfe vorzugsweise den geometrischen Unterricht, während Arithmetik und Algebra sich meist eines weit besseren Erfolges zu erfreuen haben.

Die mathematischen Vorkenntnisse, deren man für ein gedeihliches Studium der Physik bedarf, sind, wenn es sich nicht gerade um die schwierigsten Fragen handelt, weder sehr umfangreich noch schwer zugänglich. Es bedarf nur verhältnißmäßig weniger aber klar verstandener Sätze, welche durch genügende Uebung vollkommen geistiges Eigenthum geworden sind. Dadurch ist nun der Weg bezeichnet, welcher beim mathematischen Unterrichte befolgt werden muß, wenn er fruchtbringend für Wissenschaft und Leben werden soll. Es handelt sich darum, die für den logischen Zusammenhang, für das Fortschreiten in höheren mathematischen Disciplinen und für die practische Anwendung unentbehrlichen Wahrheiten möglichst klar und verständlich zu entwickeln und durch geeignete

Beispiele gut einzuüben. Nirgends wirkt eine Ueberladung an Material und ein Verlieren in Specialitäten nachtheiliger als beim mathematischen Unterrichte.

In diesem Sinne habe ich es versucht, die wichtigsten geometrischen Disciplinen zu bearbeiten, und zwar in drei Theilen, nämlich:

1. Die Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie;
2. Die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie;
3. Die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume;

welche zwar ein zusammengehöriges Ganzes bilden, von denen aber doch auch jeder einzelne Theil für sich bezogen werden kann.

Die beiden ersten Theile erscheinen gegenwärtig in zweiter Auflage. Die erste Auflage der ebenen Geometrie war im Jahre 1838, die erste Auflage der Trigonometrie war im Jahre 1839, freilich in etwas mangelhafter Ausstattung, zu Darmstadt erschienen. Die darin befolgte Methode hat sich bei dem geometrischen Unterrichte, welcher mir an der Realschule zu Gießen bis zu meiner Berufung nach Freiburg im Jahre 1844 übertragen war, vortrefflich bewährt, indem es mir namentlich gelang, den Schülern ein lebhaftes Interesse für den Gegenstand abzugewinnen und die erfreulichsten Fortschritte zu erzielen.

Es ist weder für ein weiteres Fortschreiten in der höheren Mathematik noch für praktische Anwendungen irgend einer Art genügend, daß man die geometrischen Wahrheiten einmal erkannt und verstanden hat; sie müssen durch erläuternde Beispiele, durch passende Uebungen zu einer lebendigen Anschauung erhoben werden, ohne welche eine freie Verwendung derselben für die Zwecke der Wissenschaft und des Lebens vollkommen unmöglich ist.

Während in dem vorliegenden Werkchen die Masse des Materials in dem oben angedeuteten Sinne auf das Nothwendigste beschränkt wurde, war ich bemüht, die vorgetragenen Lehren ausführlich genug zu entwickeln, um auch beim Selbstunterrichte zu einem vollkommen klaren Verständniß führen zu können, vorausgesetzt, daß der Leser alle Constructions- und Rechnungsbeispiele mit Sorgfalt und Genauigkeit ausführt.

Für eine lebendige Anschauung sind Constructionsaufgaben nach bestimmten Maaßen durchaus unentbehrlich, und deshalb habe ich sie auch in dem ganzen Werkchen von Anfang an durchgeführt. Nur durch solche Aufgaben wird es möglich, bei einem jeden Satze lange genug zu ver-

weilen, um ihn dem Gedächtniß gehörig einzuprägen und seine Bedeutung ins rechte Licht zu setzen. Gerade diese Constructionsaufgaben sind es auch, welche beim Unterrichte die rege Theilnahme des Schülers hervorrufen und dem Lehrer eine Controle darüber bieten, wie weit der Schüler in das Verständniß des fraglichen Satzes eingedrungen ist.

Beim Schulunterrichte müssen diese Aufgaben wenigstens theilweise nach einem größeren Maaßstabe auf der Tafel ausgeführt werden, wonach dann die übrigen dem häuslichen Fleiße überlassen bleiben können.

Ueber die einzelnen Theile bleiben nur noch wenige Bemerkungen zu machen übrig.

Ohne in Beziehung auf Tendenz und Methode etwas zu ändern, hat die zweite Auflage der Elemente der Geometrie namhafte Verbesserungen und eine wesentliche Ergänzung dadurch erfahren, daß die nothwendigsten Lehren der Stereometrie, welche in der ersten Auflage ganz fehlten, beigefügt wurden.

Ein besonderer Vorzug ist der neuen Auflage der Geometrie dadurch gesichert, daß die Figuren nicht allein ohne Vergleich besser und deutlicher, sondern auch weit zahlreicher sind, als in der ersten Auflage, was vorzugsweise daher rührt, daß ein großer Theil zum leichteren Verständniß wesentliche Figuren, welche in der ersten Auflage nur aus übergroßer Sparsamkeit weggeblieben waren, nun ihre Stelle gefunden haben.

Durch diese verbesserte Ausstattung, durch sorgfältige Ueberarbeitung des Textes und durch geeignete Ausfüllung mancher Lücken, welche bei der früheren Auflage lediglich dem mündlichen Unterrichte überlassen waren, hoffe ich das vorliegende Werkchen auch dem Selbstunterrichte zugänglich, so wie durch ein vollständiges Paragraphenregister und ein alphabetisches Inhaltsverzeichniß zur leichteren Orientirung und zum Nachschlagen geeigneter gemacht zu haben.

Zur Ausführung der Constructionsaufgaben ist ein Transporteur und ein Maaßstab nöthig. Um eine besondere Anschaffung derselben entbehrlich zu machen, sind den »Elementen der ebenen Geometrie« Abdrücke eines Transporteurs und einer Maaßstabstafel auf stärkerem Papier beigegeben worden.

Auch die Grundzüge der Trigonometrie erscheinen, wie schon bemerkt, in zweiter Auflage, zwar verbessert, aber ohne wesentliche Aenderung. Die trigonometrischen Functionen habe ich als Linien, als die Seiten rechtwinkeliger Dreiecke definirt, in welchen eine Seite der Längeneinheit gleich ist, weil diese Definition einfacher und anschaulicher

ist als die andere, nach welcher sie als Quotient zweier Dreiecksseiten bezeichnet werden. Die Linie ist ein geometrischer Begriff, der Quotient ist es nicht; deshalb glaubte ich die erstere Definition an die Spitze stellen, die letztere aber erst aus der Berechnung der Formeln rechtwinkeliger Dreiecke ableiten zu müssen.

Um dem Schüler nicht mit zwei Schwierigkeiten auf einmal entgegen zu treten, habe ich auch die Berechnung trigonometrischer Aufgaben im Anfang ohne Anwendung der Logarithmen durchgeführt und lasse die Benutzung der Logarithmen erst dann eintreten, wenn die Lehre von den trigonometrischen Functionen an und für sich klar und geläufig geworden ist. — Aus demselben Grunde habe ich auch die Formeln, welche zur Berechnung der fehlenden Stücke ebener und sphärischer Dreiecke dienen, erst vollständig aus der rein geometrischen Betrachtung entwickelt und erst später, ganz getrennt von dieser ersten Entwickelung, folgt die Umwandlung der Formeln, durch welche dieselben für logarithmische Rechnungen bequem gemacht werden.

Weil es im Anfang immerhin einige Schwierigkeiten hat, nach ebenen Figuren sich zu einer richtigen Anschauung räumlicher Verhältnisse zu erheben, habe ich der sphärischen Trigonometrie die Zeichnung der Netze beigefügt, aus welchen die den beiden Hauptfiguren dieser Abtheilung entsprechenden körperlichen Modelle leicht hergestellt werden können. Mit Hülfe dieser Modelle wird wohl das Verständniß der entsprechenden Entwickelungen keine Schwierigkeit mehr haben.

Der dritte Theil, die analytische Geometrie, erscheint zum ersten Male. Ich war bei Bearbeitung derselben bemüht, durch ausführlichere Besprechung concreter Fälle und durch Constructionsbeispiele nach gegebenen Zahlenwerthen die hier neu auftretenden Begriffe zugänglicher zu machen, als es gewöhnlich geschieht. Ich glaube namentlich auf diese Weise eine Brücke gebaut zu haben, welche den Leser über die Schwierigkeiten hinwegführt, die sich ihm meist beim Eintritt in das Studium der höheren geometrischen Disciplinen entgegenstellen.

Der analytischen Geometrie ist die Zeichnung des Netzes beigegeben, aus welchem man das körperliche Eck herstellen kann, welches durch die positiven Theile der drei Coordinatenebenen gebildet wird.

Freiburg, im Mai 1859.

J. Müller.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Ebene Geometrie.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Von den Winkeln.

Zweites Kapitel.

Vom Dreieck.

Drittes Kapitel.

Vom Viereck.

Viertes Kapitel.

Von den Vielecken.

Fünftes Kapitel.

Vom Kreise.

Sechstes Kapitel.

Berechnung des Flächeninhalts geradliniger ebener Figuren.

Siebentes Kapitel.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

Achtes Kapitel.

Berechnung des Kreisumfanges und des Kreisinhaltes.

Zweites Buch.

Stereometrie.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Berechnung der Körperoberflächen.

Zweites Kapitel.

Berechnung des körperlichen Inhalts.

Erstes Buch.

Ebene Geometrie.

Einleitung.

Körper, Flächen und Linien. Die Geometrie beschäftigt sich mit den Raumgrößen. Der Raum ist an und für sich unendlich, und nach allen Richtungen hin ausgedehnt. 1

Ein begränzter Raum heißt Körper. (Unterschied zwischen einem mathematischen und physischen Körper.)

Die Körper sind durch Flächen, die Flächen durch Linien, die Linien durch Punkte begränzt.

Durch Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie, durch Bewegung der Linie eine Fläche, durch Bewegung der Fläche ein Körper.

Der Punkt hat gar keine Ausdehnung. Die Linie hat nur eine Ausdehnung, nämlich Länge. (Sind die mit Bleistift auf Papier gezogenen Linien wirkliche mathematische Linien?) Die Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite. Der Körper hat drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe.

Wenn sich ein Punkt stets nach derselben Richtung bewegt, so beschreibt er eine gerade Linie.

Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten.

Durch zwei Punkte ist die Länge und die Richtung einer geraden Linie vollständig bestimmt.

Wenn die Richtung, nach welcher sich ein Punkt bewegt, eine stetige Aenderung erfährt, so beschreibt er eine krumme Linie. Es giebt unzählige Arten von krummen Linien.

Zwischen zwei Punkten lassen sich unzählig viele krumme Linien ziehen.

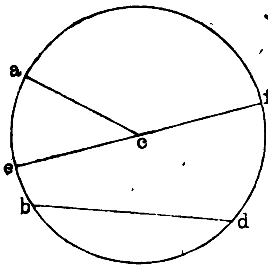
Wie man die Linien in gerade und krumme eintheilt, so theilt man die Flächen in ebene und krumme. Wenn man in einer Fläche irgend zwei Punkte bestimmt hat, so kann man sie stets durch eine gerade Linie verbunden denken. Fällt nun diese gerade Linie stets mit der Fläche zusammen, wie man auch die Punkte wählen mag, so ist die Fläche eine ebene, ist dies nicht der Fall, so ist sie eine krumme.

2 **Ebene Figuren.** Eine durch gerade oder krumme Linien begränzte ebene Fläche heißt eine ebene Figur. Die ebene Geometrie beschäftigt sich nur mit der Betrachtung ebener Figuren.

Alle durch gerade Linien begränzte ebene Figuren kann man mit dem gemeinschaftlichen Namen Vielecke bezeichnen. Nach der Anzahl der Gränzlinien nennt man sie Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w.

Unter den durch krumme Linien gebildeten ebenen Figuren kann in der Elementargeometrie nur der Kreis betrachtet werden. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche die Eigenschaft hat, daß es in demselben einen Punkt *c* (Fig. 1) giebt, welcher gleich weit von allen Punkten der krummen Begränzungslinie entfernt ist. Dieser Punkt heißt Mittelpunkt oder Centrum.

Fig. 1.



Jede vom Centrum nach der Begränzungslinie gezogene Gerade, wie *ac*, heißt Halbmesser oder Radius. Alle Radien desselben Kreises sind einander gleich.

Die krumme Begränzungslinie heißt Peripherie, Kreislinie; bisweilen wird sie auch bloß mit dem Namen Kreis bezeichnet. Aus dem Zusammenhange ergiebt sich leicht, ob mit dem Worte »Kreis« die Peripherie, oder die von der Peripherie begränzte Fläche gemeint sei.

Eine gerade Linie, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, wie *bd*, heißt Sehne oder Chorde. Eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Sehne, wie *ef*, heißt Diameter oder Durchmesser. Der Durchmesser ist doppelt so lang, als ein Radius.

3 **Längenmaasse.** Eine gerade Linie messen, heißt sehen, wie oft eine Linie von bekannter Länge in ihr enthalten ist. Diese bekannte Länge

nennt man das Maaß. Ein Lineal, ein Stab, ein Stück Papier u. s. w., auf welchem man solche Maaße aufgetragen hat, heißt Maaßstab.

Die Einheit des Längenmaaßes ist nicht in allen Ländern dieselbe. Es ist aber von der größten Wichtigkeit, die Längeneinheit so zu bestimmen, daß wenn das Maaß auch ganz und gar verloren ginge, man doch die Längeneinheit ganz genau auf dieselbe Weise wieder auffinden könnte. Diesen Vortheil der Bestimmung hat nur das neuere französische Maaßsystem.

Die Einheit dieses Maaßsystems ist gewissermaßen der Umfang eines größten Kreises, welchen man sich durch die beiden Pole der Erde auf ihrer Oberfläche gezogen denken kann. Denkt man sich die Peripherie dieses Kreises in 40 Millionen gleiche Theile getheilt, so ist die Länge eines solchen Theiles ein Meter. $^1/_{10}{}^m = 1$ Decimeter, $^1/_{100}{}^m = 1$ Centimeter, $^1/_{1000}{}^m = 1$ Millimeter.

Auf der der Seite 6 gegenüberstehenden Tafel sind mehrere Maaßstäbe zusammengestellt, und zwar ist der oberste ein Centimetermaaßstab. Das äußerste Centimeter links ist noch in 10 Millimeter getheilt.

Die Fußmaaße mehrerer Länder sind von dem französischen Metermaaße abgeleitet, so ist z. B. ein badischer oder schweizerischer Fuß gleich 3 Decimetern. Da nun ferner dieser Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien getheilt ist, so ist:

1	bad.	oder schweiz.	Fuß	= 0,3	Meter	= 3	Decimeter,
1	»	»	Zoll	= 0,03	»	= 3	Centimeter,
1	»	»	Linie	= 0,003	»	= 3	Millimeter,

wie es sich auch aus Vergleichung des obersten und untersten Maaßstabes der Maaßtafel ergiebt.

Bei sämmtlichen älteren Fußmaaßen ist der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien eingetheilt, und deshalb werden sie durch den Namen der Duodecimalmaaße von den neueren Decimalmaaßen unterschieden.

In der folgenden Tabelle ist das Größenverhältniß der wichtigeren unter den älteren Fußmaaßen zum Metermaaß bis auf 5 Decimalstellen genau angegeben.

1 großherzoglich hessischer Fuß	= 0,25000	Meter,
1 sächsischer Fuß	= 0,28319	»
1 braunschweigischer Fuß . .	= 0,28536	»
1 würtembergischer Fuß . .	= 0,28649	»
1 bairischer Fuß	= 0,29186	»

1 hannöverscher Fuß . . .	=	0,29209	Meter,
1 englischer (russischer) Fuß .	=	0,30479	»
1 rheinländ. oder preuß. Fuß	=	0,31385	»
1 österreichischer Fuß	=	0,31610	»
1 pariser Fuß	=	0,32484	»

Der großherzoglich hessische, der würtembergische und der badische Fuß sind in 10 Zolle getheilt, während alle anderen Duodecimalmaaße sind.

Nach diesen Angaben berechne der Schüler, wie viel Millimeter 1 preußischer, 1 pariser u. s. w. Zoll enthält, und vergleiche die Resultate mit der Maaßstabstabelle auf gegenüberstehender Seite.

Aufgaben.

6′ 7″ 3‴ altes pariser Maaß — wie viel nach Metermaaß, wie viel nach englischem Maaß u. s. w.?

72,38 Meter — wie viel Fuß, Zoll und Linien nach preußischem, altem französischen u. s. w. Maaß?

Größere Längenmaaße sind:

1 Toise	=	6	pariser Fuß,
1 Faden	=	6	englische Fuß,
1 preußische Ruthe	=	12	preußische Fuß,
1 österreichische Klafter	=	6	österreichische Fuß,
1 badische Ruthe	=	10	badische Fuß,
1 Decameter	=	10	Meter.

Die wichtigsten Meilenmaaße sind:

1 Miriameter	=	10000	Meter,
1 deutsche oder geographische Meile	=	22842	par. Fuß,
1 englische Landmeile	=	4957	» »
1 » Seemeile	=	5710	» »
1 russische Werst	=	3285	» »
1 griechisches Stadium	=	571	» »

Englische und Russische Zoll.

Preussische Zoll.

Oesterreichische Zoll.

Pariser Zoll.

Badische und Schweizer Zoll.

Königl. sächsische Zoll.

Hannöversche u. Bairische Zoll.

Grossherzoglich hessische Zoll.

Würtembergische Zoll.

Sechs braunschweigische Zoll sind nur um ein Millimeter grösser als sechs sächsische. Der bairische Fuss ist nur um $^{2}/_{10}$ Millimeter

r,

nd der badische
malmaaße sind.
llimeter 1 preu=
Resultate mit

maaß, wie viel

ch preußischem,

ß,
uß,
Fuß,

Erstes Kapitel.

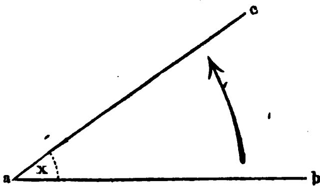
Von den Winkeln.

Definition und Eintheilung der Winkel. Durch einen Punkt 4
können unzählig viele gerade Linien gezogen werden, welche sämmtlich verschiedene Richtungen haben.

Durch einen Punkt können keine zwei gerade Linien gezogen werden, welche gleiche Richtung haben.

Wenn zwei gerade Linien ab und ac (Fig. 2) durch einen und denselben Punkt a gehen, so kann man sich die eine von beiden Linien, z. B. ab, um den Punkt a in der Ebene der Figur so weit gedreht (geschwenkt) denken, bis sie mit ac zusammenfällt. Die Größe der Drehung nun, welche nöthig ist, um die Linie ab in die Lage ac zu bringen, nennt man **Winkel**. Da die Größe der Drehung von der Länge der Linien ab und ac unabhängig ist, so ändert sich auch die Größe des Winkels nicht, man mag die den Winkel bildenden Linien ab und ac noch so sehr verlängern oder verkürzen.

Fig. 2.



Die beiden den Winkel bildenden Geraden heißen **Schenkel**, der beiden Schenkeln gemeinschaftliche Punkt **Scheitel** des Winkels. Man benennt einen Winkel auf zweierlei Weise. **Erstens**: mittelst der drei Buchstaben, welche die Endpunkte der beiden Schenkel bezeichnen, wobei aber immer der Buchstabe in die Mitte zu setzen ist, der an dem Scheitel steht; so heißt z. B. der Winkel in obenstehender Figur bac oder cab. **Zweitens**: durch einen einzigen Buchstaben, welchen man zwischen die Schenkel des Winkels setzt; so ist z. B. der Winkel in der Figur durch den Buchstaben x bezeichnet.

Man kann sich die Linie ab (Fig. 3 a. f. S.) in einer Ebene so weit um den Punkt a herumgedreht denken, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt. Hat man sie nur um den vierten Theil der

ganzen Umdrehung gedreht, so kommt sie in die Lage *ac*. Dreht man sie von der Lage *ac* aus abermals um eine Viertelumdrehung, so kommt

Fig. 3.

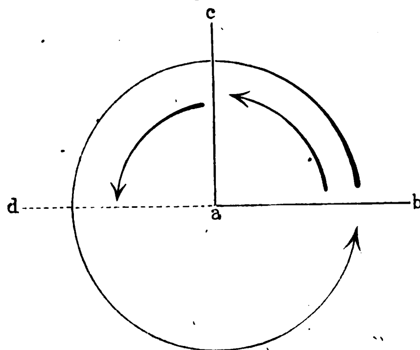


Fig. 4.



Fig. 5.

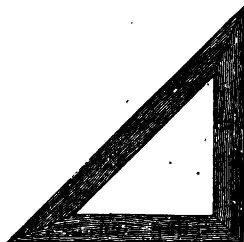
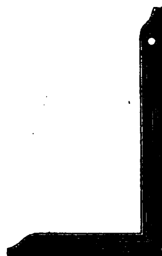


Fig. 6.



sie in die Lage *ad*, d. h. in die Verlängerung der ursprünglichen Lage *ab*. Winkel wie *cab* und *cad*, deren jeder ein Viertel der ganzen Umdrehung beträgt, heißen rechte Winkel.

Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Eine gerade Linie, welche auf einer anderen rechtwinkelig steht, heißt ein Perpendikel.

Das einfachste Mittel, dessen man sich bedienen kann, um rechte Winkel zu zeichnen oder auf einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel zu errichten, ist der sogenannte rechte Winkel, d. h. ein gewöhnlich von Holz ausgeführtes rechtwinkeliges Dreieck, wie deren in Fig. 4 und in Fig. 5 dargestellt sind. Metallene (meist eiserne) rechte Winkel von der Form Fig. 6 werden Winkelhaken genannt.

Ein jeder Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heißt ein spitzer; ein Winkel, welcher größer ist als ein rechter, heißt ein stumpfer Winkel.

Neben- und Scheitelwinkel. Verlängert man den einen Schenkel, 5
etwa den Schenkel ab, eines Winkels x (Fig. 7) über den Scheitel hinaus, so entsteht ein zweiter Winkel y. Diese beiden Winkel haben einen Schenkel ad gemeinschaftlich, die beiden anderen Schenkel ab und ac aber bilden eine gerade Linie. Ein solches Winkelpaar führt den Namen Nebenwinkel. Nebenwinkel betragen zusammen eine halbe Umdrehung oder mit anderen Worten: Nebenwinkel sind zusammengenommen gleich zwei Rechten. Ist einer der beiden Nebenwinkel ein spitzer, so muß der andere ein stumpfer sein und umgekehrt.

Fig. 7.

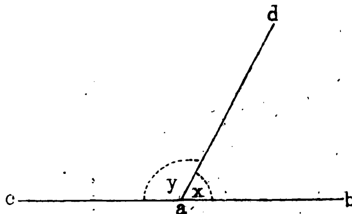
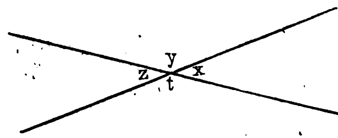


Fig. 8.



Verlängert man die beiden Schenkel eines Winkels x (Fig. 8) über den Scheitel hinaus, so entstehen noch drei Winkel y, z und t; alle vier Winkel, welche um den Durchschnittspunkt der beiden Geraden herumliegen, betragen zusammengenommen vier Rechte. Je zwei dieser Winkel, welche nur den Scheitel gemeinschaftlich haben, wie z und x, y und t, heißen Scheitelwinkel. Scheitelwinkel sind einander gleich, denn

$$y + x = 2\ \mathfrak{R}.$$
$$y + z = 2\ \mathfrak{R}.$$

also auch

$$y + x = y + z,$$

woraus folgt, daß

$$x = z.$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß $y = t$ ist.

Winkelmessung. Einen Winkel messen, heißt ihn mit einem 6
Winkel von bekannter Größe vergleichen. Als unveränderliche Winkeleinheit kann man am zweckmäßigsten den rechten Winkel betrachten, den man zur leichteren Vergleichung in 90 gleiche Theile getheilt hat, welche

den Namen Grade führen. Die Größe der Drehung, welche nöthig ist, um einen Winkel von einem Grad (1^0) zu erzeugen, wird also 90mal wiederholt einen rechten Winkel bilden. Ein Grad ist $^1/_{90}$ der Viertelumbrehung, $^1/_{180}$ der halben Umdrehung und $^1/_{360}$ der ganzen Umdrehung. Jeder Grad ist in 60 Minuten ('), jede Minute in 60 Secunden getheilt.

Ein Instrument, welches dazu dient, Winkel, welche auf das Papier gezeichnet sind, zu messen, oder genannte Winkel auf das Papier aufzutragen, heißt Transporteur.

Der Transporteur ist gewöhnlich ein Halbkreis, dessen Umfang in 180 gleiche, den einzelnen Graden entsprechende Theile getheilt ist, wie

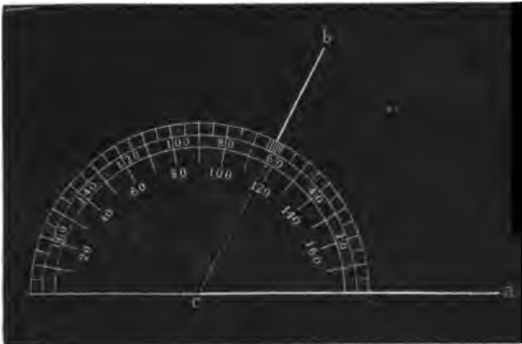
Fig. 9.



Fig. 9 zeigt. An dem Durchmesser, welcher den Halbkreis einerseits begränzt, ist der Mittelpunkt des Kreisbogens markirt.

Um einen Winkel zu messen, legt man den Durchmesser des Transporteur-Halbkreises so an den einen Schenkel des Winkels, daß der Mittelpunkt des Transporteurs auf den Scheitel des Winkels zu liegen kommt, wie Fig. 10 und Fig. 11 erläutern, und liest alsdann am getheilten Bogen des Transporteurs ab, wobei man aber von dem Schenkel an, an welchem der Durch-

Fig. 10.



messer des Transporteurs angelegt ist, gegen den andern hin zählt; so mißt der Winkel bca (Fig. 10) 63°, der Winkel dfg (Fig. 11) mißt dagegen 117°.

Fig. 11.



Das Messen der Winkel ist gehörig einzuüben, ehe man weiter geht.

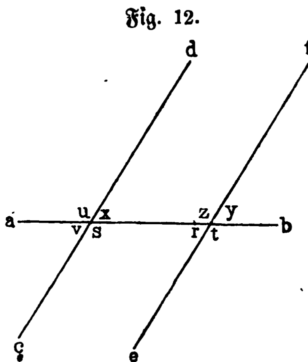
Ist einmal das Winkelmessen gehörig eingeübt, so bedarf das Auftragen von Winkeln keiner weiteren Erklärung.

Zur Uebung trage man Winkel von 23°, 57°, 73°, 87°, 112°, 163° u. s. w. auf.

Statt der gewöhnlich in Messing oder Horn ausgeführten Transporteure kann man auch einen auf Papier gedruckten anwenden, wenn derselbe längs der geradlinigen wie der halbkreisförmigen Gränze gehörig ausgeschnitten ist; es sind deshalb diesem Büchlein mehrere Abdrücke dieses Transporteurs auf stärkerem Papier beigegeben.

Parallellinien. Ist die Lage einer Linie ab (Fig. 12) gegeben, so 7
wird die Richtung einer anderen Linie cd durch die vier Winkel u, v, x und s bestimmt, welche die Linie cd mit ab macht. Diese vier Winkel sind aber sämmtlich schon dadurch bestimmt, daß **einer** derselben gegeben ist. — Eine andere Linie ef bildet mit ab die vier Winkel z, y, r und t. Der Winkel y entspricht seiner Lage nach dem Winkel x; ebenso sind z und u, t und s, r und v entsprechende Winkel. — Ist nun einer der vier Winkel z, y, r und t, z. B. der Winkel y, seinem entsprechenden Winkel x gleich, so sind auch die übrigen entsprechenden Winkel gleich, d. h. wenn $y = x$, so ist nothwendig auch $z = u$ (denn wenn die Winkel x und y gleich sind, so müssen es auch ihre Nebenwinkel sein), $r = v$ und $t = s$.

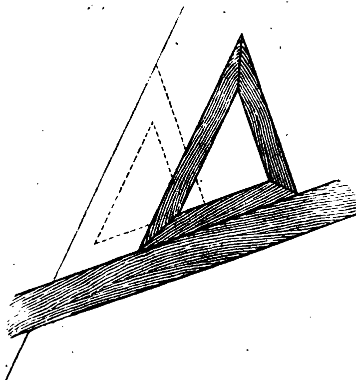
Fig. 12.



Wenn aber die Winkel, welche *ef* mit *ab* bildet, den durch die Linien *ab* und *cd* gebildeten entsprechenden Winkeln gleich sind, so ist die Richtung der Linien *cd* und *ef* auf gleiche Weise bestimmt, oder mit anderen Worten: die Linien *cd* und *ef* haben gleiche Richtung. Solche Linien aber, welche gleiche Richtung haben, heißen Parallellinien.

Es ist demnach leicht, Parallellinien mit Hülfe des Transporteurs zu ziehen; man hat nur Linien zu construiren, welche denselben Winkel mit einer gegebenen Linie machen, so werden sie sämmtlich unter einander parallel sein. Bequemer ist es, parallele Linien mit Hülfe eines rechten Winkels (d. h. eines rechtwinkeligen Dreiecks von Holz oder Metall) zu ziehen, denn wenn man ein solches (Fig. 13) an einem Lineale hin und her schiebt, so sind alle Lagen, welche eine und dieselbe Kante annehmen kann, unter einander parallel.

Fig. 13.



Da durch einen Punkt keine zwei Linien gehen können, welche gleiche Richtung haben (§. 4), so können Parallellinien keinen Punkt mit einander gemein haben, oder mit anderen Worten: parallele Linien können sich nie schneiden, man mag sie noch so sehr verlängern.

Aus der Gleichheit der entsprechenden Winkel, welche zwei parallele Linien mit einer dritten anders gerichteten bilden, ergeben sich folgende wichtige Beziehungen.

Die beiden Winkel x und z, Fig. 12, welche innerhalb der beiden Parallellinien auf derselben Seite der Linie *ab* liegen, heißen innere Gegenwinkel, und sind zusammengenommen gleich zwei Rechten, denn $z + y = 2$ R. (§. 5), also auch $z + x = 2$ R., da ja $x = y$. Die Winkel s und r sind ebenfalls innere Gegenwinkel und sind also ebenfalls zusammengenommen gleich zwei Rechten.

Die beiden Winkel x und r, welche innerhalb der beiden parallelen Linien und auf verschiedenen Seiten von *ab* liegen, heißen innere Wechselwinkel. Ebenso ist s ein innerer Wechselwinkel von z. In-

nere Wechselwinkel sind einander gleich, denn $x = y$; da aber $r = y$ (§. 5), so muß auch $x = r$ sein. Ebenso läßt sich zeigen, daß $s = z$.

Die beiden Winkel u und t sind äußere Wechselwinkel; ebenso v und y. Daß äußere Wechselwinkel einander gleich sind, läßt sich gerade ebenso beweisen, wie die Gleichheit der inneren Wechselwinkel bewiesen wurde.

Der Winkel zweier Linien, welche mit den Schenkeln eines Winkels parallel oder zu denselben rechtwinkelig gezogen sind. 8
Eine Folge aus §. 7 ist auch, daß der Winkel y (Fig. 14) dem Winkel x gleich sein muß, wenn jeder Schenkel des Winkels y einem Schenkel des Winkels x parallel ist. Den Beweis mag der Schüler selbst auffinden.

Fig. 14.

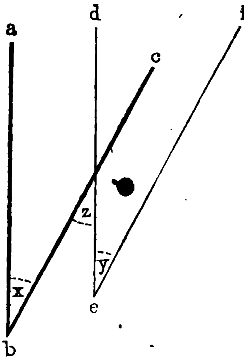
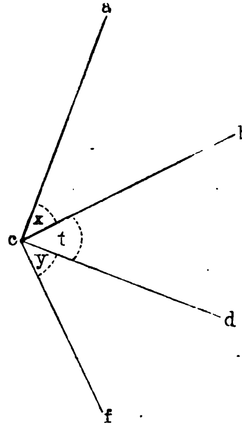


Fig. 15.



Errichtet man im Scheitel des Winkels x (Fig. 15) auf jedem Schenkel dieses Winkels ein Perpendikel, so ist der Winkel y, welchen die beiden Perpendikel mit einander machen, gleich dem Winkel x.

Beweis:

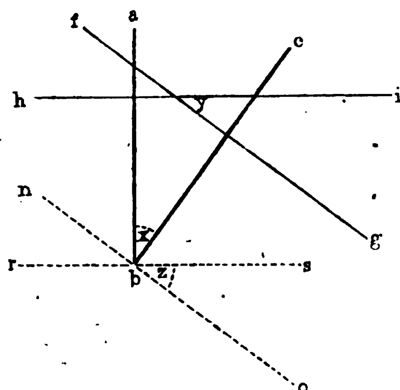
$$x + t = 1 \text{ R.}$$
$$y + t = 1 \text{ R.}$$
also $$x = y.$$

(Wie muß der Beweis geführt werden, wenn der gegebene Winkel x ein stumpfer ist?)

Daraus folgt nun allgemein, daß zwei Linien fg und hi (Fig. 16 a. f. S.), von denen jede auf dem einen Schenkel des Winkels x recht=

winkelig steht, sich unter einem Winkel y schneiden, welcher dem Winkel x gleich ist, wenn sie auch nicht durch den Scheitel des Winkels x gehen; denn zieht man durch den Scheitel des Winkels x zwei Linien parallel mit fg und hi, so werden diese einen Winkel z mit einander machen, der dem Winkel y gleich ist. Da aber nun, wie eben bewiesen wurde, dieser Winkel $z = \measuredangle x$ ist, so ist auch $\measuredangle y = \measuredangle x$.

Fig. 16.



Zweites Kapitel.

Vom Dreieck.

---

9 **Die Winkel des Dreiecks.** Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien begränzte ebene Figur.

Ein Dreieck hat drei Eckpunkte und drei Winkel.

Die drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich zwei Rechten.

Beweis. Man ziehe mit irgend einer der drei Seiten des Dreiecks durch die ihr gegenüberliegende Spitze eine Linie parallel. Dadurch entstehen zwei neue Winkel s und t (Fig. 17). Nun aber ist, wie leicht bewiesen werden kann, $s + x + t = 2$ R., folglich muß auch $y + x + z = 2$ R. sein, weil $y = s$ und $z = t$ (als Wechselwinkel).

Sind demnach in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so findet man den dritten, wenn man ihre Summe von 2 Rechten, also von 180° abzieht.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt auch, daß wenn sich in einem Dreieck ein rechter oder ein stumpfer Winkel befindet, die beiden anderen nothwendig spitze sein müssen.

Man nennt ein Dreieck spitzwinkelig, wenn alle drei Winkel spitze sind, rechtwinkelig, wenn es einen rechten, und stumpfwinkelig, wenn es einen stumpfen Winkel hat.

Fig. 17.

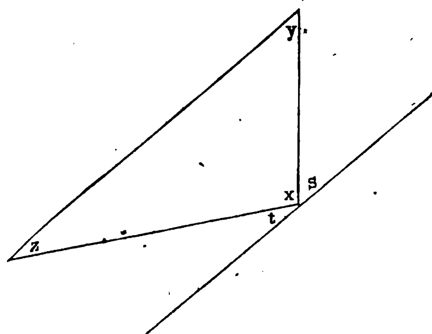
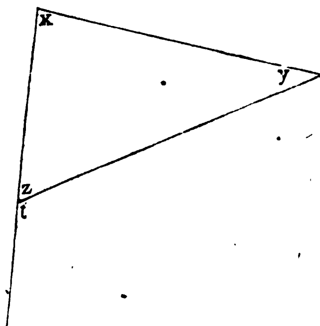


Fig. 18.



Verlängert man irgend eine Seite eines Dreiecks, so entsteht ein Außenwinkel t (Fig. 18), welcher so groß ist, wie die beiden inneren ihm gegenüberstehenden Winkel x und y zusammengenommen.

Beweis:

$$x + y + z = 2\ \mathfrak{R}.$$
$$t + z = 2\ \mathfrak{R}.,$$

also $$x + y + z = t + z,$$

woraus folgt, daß $$x + y = t.$$

Construction des Dreiecks nach drei gegebenen Bestimmungsstücken. 10 Ein Dreieck ist bestimmt, sobald die Lage der drei Eckpunkte bestimmt ist. Ist die Lage der Eckpunkte nicht unmittelbar gegeben, so kann sie mittelbar durch die einzelnen Bestimmungsstücke des Dreiecks, d. h. durch seine Seiten und Winkel gegeben sein. Es sind hier fünf Fälle zu unterscheiden, welche ihrer großen Wichtigkeit wegen ausführlich betrachtet werden sollen.

I. Ein Dreieck ist bestimmt, wenn seine drei Seiten gegeben sind.

Durch eine Seite rs (Fig. 19 a. f. S.) sind schon zwei Eckpunkte des Dreiecks gegeben. Ist außer dieser Seite auch noch die Länge der

Seite gegeben, welche in r mit rs zusammentrifft, so ist dadurch die Bedingung ausgesprochen, daß der dritte Eckpunkt t um die Länge dieser zweiten gegebenen Linie von dem Punkte r entfernt sein muß, daß er also auf einem Kreise liegen muß, dessen Mittelpunkt r, und dessen Radius gleich dieser zweiten gegebenen Linie ist. Durch diese beiden Seiten ist aber offenbar das Dreieck noch nicht bestimmt, weil man ja den dritten Eckpunkt noch willkürlich auf dem um r gezogenen Kreise wählen kann. Ist aber noch die Länge der dritten Seite gegeben, so ist dadurch noch die Bedingung ausgesprochen, daß der Punkt t auch auf einem Kreise liegen soll, dessen Mittelpunkt s, und dessen Radius gleich dieser dritten Seite ist. Der gesuchte dritte Punkt muß also auf dem Durchschnittspunkte t der beiden Kreise liegen.

Fig. 19.

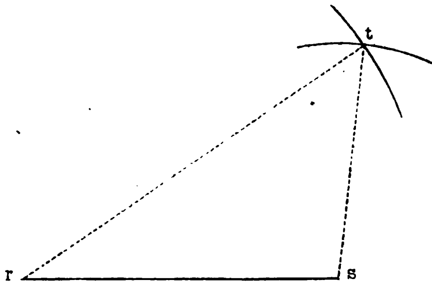
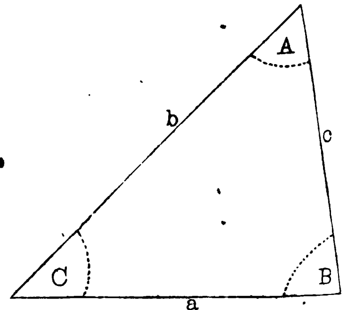


Fig. 20.



Da sich die Kreise sowohl über als unter rs schneiden, so läßt sich das verlangte Dreieck sowohl über als unter rs construiren. Zur leichteren Orientirung wollen wir annehmen, daß bei den folgenden Aufgaben stets eine Seite, die wir a nennen wollen, wagerecht liege. Die Seite links soll dann stets b, die rechts stets c genannt werden, wie man Fig. 20 sieht. Die drei Winkel der Dreiecke sollen im Folgenden stets mit denjenigen großen Buchstaben bezeichnet werden, welche mit den kleinen Buchstaben der gegenüberliegenden Seite gleichnamig sind; der obere Winkel soll also mit A, der Winkel links mit C, der Winkel rechts mit B bezeichnet werden.

Nach diesen Erläuterungen werden die folgenden Aufgaben verständlich sein.

Sechs Dreiecke zu construiren, für welche

	a	b	c		a	b	c
1.	2″	2″	2″	4.	9cm	12cm	15cm
2.	2″	3″	3″	5.	6cm	9cm	12cm
3.	3″	2″	2″	6.	6cm	5cm	9cm

Welches Zollmaaß man bei den drei ersten Aufgaben anwenden will, ist gleichgültig. Bei den drei letzten Aufgaben ist die gegebene Seitenlänge in Centimetern ausgedrückt.

Wenn diese Dreiecke construirt sind, messe man alle Winkel. Welche dieser Dreiecke sind *spitzwinkelige*, welche *rechtwinkelige*, welche *stumpfwinkelige*?

Wenn alle drei Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, so heißt es *gleichseitig*, sind nur zwei Seiten einander gleich, *gleichschenkelig*, ist keine Seite der anderen gleich, *ungleichseitig*. Welche der construirten sechs Dreiecke sind *gleichseitig*, welche *gleichschenkelig*?

(Nach dem Muster dieser können noch mehr Beispiele hinzugefügt werden.)

Da durch die drei Seiten ein Dreieck vollständig bestimmt ist, so kann man aus drei gegebenen Seiten auch nicht zwei verschiedene Dreiecke construiren. Construirt man mit denselben drei Seiten zwei Dreiecke, so müssen beide einander gleich sein. Kann man nachweisen, daß jede Seite eines Dreiecks gleich ist der entsprechenden Seite eines anderen, so kann man demnach daraus schließen, daß die ganzen Dreiecke, mithin auch die entsprechenden Winkel gleich sein müssen.

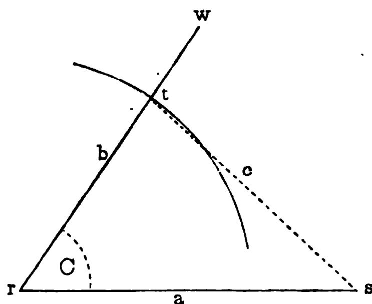
Sind zwei der zur Construction eines Dreiecks gegebenen Seiten zusammengenommen kleiner als die dritte, so ist die Auflösung unmöglich. Es sei z. B. $a = 3''$, $b = 1''$, $c = 1''\ 5'''$; $a = 1''$, $b = 2''$, $c = 3''$. *In einem Dreieck sind also zwei Seiten zusammengenommen stets größer als die dritte.*

II. *Ein Dreieck ist bestimmt, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.*

Wäre z. B. wieder nur die Seite a gegeben, so wären dadurch nur zwei Eckpunkte r und s des Dreiecks bestimmt, und der dritte noch vollkommen willkürlich. Diese Willkür wird schon dadurch beschränkt, daß man den Winkel C bestimmt, den die Seite b mit der Seite a machen

soll (Fig. 21). (Dieser Winkel ist C genannt, weil er der Seite c gegenüberliegt. Ebenso sollen auch mit A und B die den Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel bezeichnet werden.) Dadurch nämlich, daß der Winkel C gegeben ist, ist die Richtung der Linie rw gegeben, auf welcher der dritte Eckpunkt t liegen muß; durch die Bestimmung der Länge der Seite b wird nun endlich auch noch der Ort des dritten Punktes t auf der Linie rw und somit das ganze Dreieck bestimmt.

Fig. 21.



Zur Uebung construire man folgende sechs Dreiecke:

	a	C	b		a	B	c
1.	2″	80°	3″	4.	100mm	75°	95mm
2.	3″	112°	2″	5.	84mm	36°	115mm
3.	4″	60°	2″	6.	112mm	120°	92mm

Bei den drei letzten Aufgaben sind die Längen in Millimetern ausgedrückt.

Wie groß sind in jedem dieser Dreiecke die nicht gegebenen Winkel, und die nicht gegebene Seite?

Wenn man aus denselben zwei Seiten, welche denselben Winkel einschließen, zwei Dreiecke construirt, so müssen dieselben nothwendig vollständig einander gleich sein, weil ja zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel ein Dreieck vollkommen bestimmen, und die beiden Dreiecke also auf gleiche Weise bestimmt sind. Man kann demnach auch behaupten, daß zwei Dreiecke gleich sein müssen, wenn man nachweisen kann, daß zwei Seiten des einen gleich sind den entsprechenden Seiten des anderen, und daß der von beiden Linien eingeschlossene Winkel im einen Dreieck so groß ist wie im anderen.

III. Wenn zur Construction eines Dreiecks zwei Seiten und ein Winkel gegeben ist, welcher der einen von beiden Seiten gegenüber liegt, so ist das Dreieck nur in einem Falle vollkommen bestimmt, wie dies aus der folgenden Betrachtung klar werden wird.

Es sei zur Construction eines Dreiecks gegeben a, b und B, aber $b > a$. Durch die Seite a (Fig. 22) sind zwei Eckpunkte r und s des Dreiecks gegeben. Durch den Winkel B ist die Richtung der Linie su bestimmt, auf welcher der dritte Punkt liegen muß, und durch die gegebene Länge der Seite b ist endlich die Bedingung ausgesprochen, daß der dritte Eckpunkt x auf einem Kreise liegen soll, dessen Mittelpunkt r, und dessen Radius der gegebenen Länge b gleich ist. Der gesuchte Punkt x muß also der Durchschnittspunkt der geraden Linie su und des um r beschriebenen Kreises sein. In unserm Falle sind zwei Seiten und der Winkel gegeben, welcher der größeren von beiden Seiten gegenüberliegt. In diesem Falle ist das Dreieck durch die gegebenen Stücke vollständig bestimmt. Ließe man bei unveränderter Größe von a und B die Seite b abnehmen, so würde der dritte Eckpunkt näher zu s herunterrücken. Verkleinert man b soweit, daß es gleich a wird, so wird das Dreieck ein gleichschenkeliges; der um r beschriebene Kreis geht alsdann auch durch den Punkt s. Wird aber b kleiner als a, so schneidet der um r beschriebene Kreis die Linie su in zwei Punkten t und t' (Fig. 23), von denen man jeden als dritten Punkt des Dreiecks wählen kann; man kann demnach aus denselben

Fig. 22.

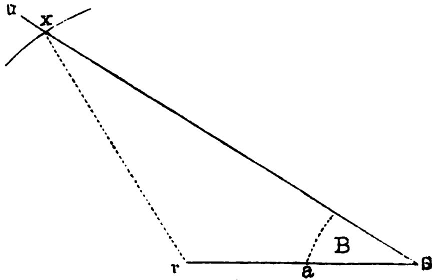


Fig. 23.

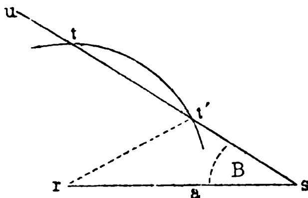
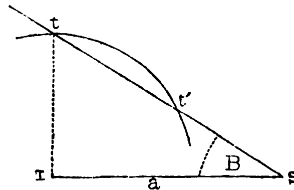


Fig. 24.



Stücken a, B und b zwei verschiedene Dreiecke srt und srt' construiren, wenn $b < a$.

Endlich kann man b noch so klein werden lassen, daß der um r beschriebene Kreis die Seite su gar nicht schneidet. In diesem Falle ist es gar nicht möglich, aus den gegebenen Stücken ein Dreieck zu con-

struiren. Das Gesagte wird durch die Construction folgender Dreiecke klar werden.

1. Gegeben: zwei Seiten und der der längeren von beiden gegenüberstehende Winkel. (Nur eine Auflösung möglich.)

	a	*B*	*b*		*a*	*C*	*c*
1.	2″	80°	3″	4.	2″	110°	4″
2.	3″	120°	4″	5.	3″	64°	3″
3.	1″	40°	2″	6.	2″	72°	2″ 5‴

2. Gegeben: zwei Seiten und der der kürzeren von beiden gegenüberstehende Winkel. (Entweder zwei oder keine Lösung möglich.)

	a	*B*	*b*		*a*	*C*	*c*
1.	4″	36°	2″	4.	4″	110°	2″
2.	5″	120°	3″	5.	4″	48°	3″ 5‴
3.	3″	40°	2″ 5‴	6.	5″	72°	4″

Sind also zur Construction eines Dreiecks zwei Seiten und der der längeren von beiden gegenüberstehende Winkel gegeben, so ist die Auflösung jederzeit möglich und das Dreieck durch diese Stücke vollkommen bestimmt. Daraus folgt aber, daß zwei Dreiecke einander gleich sein müssen, wenn man nachweisen kann, daß zwei Seiten des einen und der Winkel, welcher der längeren von beiden gegenübersteht, den entsprechenden Stücken des anderen gleich sind.

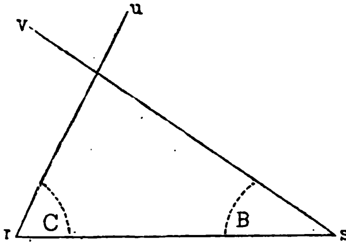
Sind zur Construction eines Dreiecks zwei Seiten und der der kürzeren von beiden gegenüberstehende Winkel gegeben, so ist entweder gar keine, oder es sind zwei Auflösungen möglich. Es folgt daraus, daß zwei Dreiecke verschieden sein können, wenn man auch nachweisen kann, daß zwei Seiten des einen, und der der kürzeren gegenüberstehende Winkel den entsprechenden Stücken des anderen gleich sind. Die Dreiecke *srt* und *srt'* (Fig. 24) z. B. sind offenbar ungleich, obgleich die Stücke *a*, *b* und *B* in beiden gleich sind.

Um die Gleichheit zweier Dreiecke zu beweisen, reicht es demnach nicht hin nachzuweisen, daß sie zwei Seiten und den der einen von bei-

den gegenüberliegenden Winkel gleich haben, wenn man nicht auch zeigen kann, daß dieser Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.

IV. Durch eine Seite und die beiden an dieser Seite anliegenden Winkel ist Ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Fig. 25.



Durch eine Seite a sind zwei Eckpunkte r und s (Fig. 25) des Dreiecks; durch den Winkel C ist die Richtung der Linie ru, durch den Winkel B ist die Richtung der Linie sv bestimmt, auf denen der dritte Eckpunkt liegen muß; er kann also nur auf dem Durchschnitt der beiden Linien sv und ru liegen.

Beispiele.

	a	B	C		a	B	C
1.	97mm	60°	30°	4.	10cm	110°	30°
2.	122mm	80°	40°	5.	18cm	115°	40°
3.	70mm	73°	36°	6.	8cm	45°	120°

Da ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel vollkommen bestimmt ist, so muß auch ein Dreieck, in welchem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gerade so groß sind wie die entsprechenden Stücke eines anderen, diesem ganz gleich sein.

V. Ein Dreieck ist durch eine Seite, einen anliegenden und einen ihr gegenüberliegenden Winkel völlig bestimmt; denn da zwei Winkel gegeben sind, so kann man den dritten berechnen, und dadurch läßt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen; denn wenn man aus den gegebenen Winkeln etwa A und C den dritten B berechnet hat, so ist man in demselben Fall, als wäre gleich von Anfang die Seite a mit den beiden anliegenden Winkeln B und C gegeben gewesen.

Beispiele.

	a	B	A		a	B	A
1.	3″	40°	112°	4.	3″	80°	40°
2.	4″	50°	85°	5.	4″	20°	70°
3.	2″	60°	78°	6.	2″	40°	120°

Aus dem Vorangegangenen folgt, daß zwei Dreiecke einander gleich sein müssen, wenn man nachweisen kann, daß sie eine Seite, einen ihr anliegenden und einen ihr gegenüberstehenden Winkel gleich haben.

Der Uebersicht wegen wollen wir die fünf in diesem Paragraphen besprochenen Fälle, für welche die Gleichheit zweier Dreiecke behauptet werden kann, kurz zusammenstellen.

Zwei Dreiecke sind einander gleich:

1. Wenn jede der drei Seiten des einen gleich ist der entsprechenden Seite des anderen.

2. Wenn sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben.

3. Wenn zwei Seiten und der der längeren von beiden gegenüberstehende Winkel gleich sind den entsprechenden Stücken des anderen Dreiecks.

4. Wenn die beiden Dreiecke eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gleich haben.

5. Wenn eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Winkel in beiden gleich sind.

In den folgenden Lehrsätzen gründet sich der Beweis für die Gleichheit zweier Dreiecke immer auf einen der oben aufgezählten Fälle.

11 **Lehrsatz.** In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen, einander gleich, oder mit anderen Worten: die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sind einander gleich.

Beweis. Es sei rst (Fig. 26) ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem $rt = st$. Man denke sich nun die Grundlinie rs halbirt, und nach dem Halbirungspunkt d die Linie td gezogen, so entstehen zwei Dreiecke, welche einander gleich sind, denn

$$rt = st$$
$$rd = sd$$
$$td = td$$
$$\overline{\text{also } \triangle\, rtd = \triangle\, std \text{ (1. Fall).}}$$

Sind aber die ganzen Dreiecke gleich, so müssen auch die entsprechenden Winkel gleich sein, folglich $\measuredangle x = \measuredangle g$. Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke folgt auch $\measuredangle z = \measuredangle v$; die Linie also, welche man von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie zieht, steht also rechtwinkelig auf derselben. In einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel einander gleich, und jeder beträgt $^2/_3$ R. oder 60°.

Fig. 26.

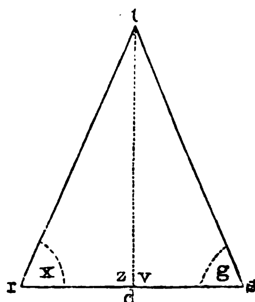
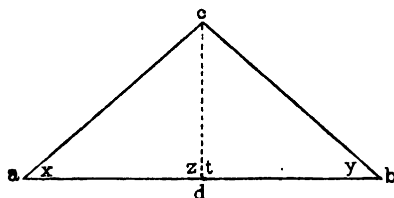


Fig. 27.



Lehrsatz. Sind zwei Winkel in einem Dreieck einander gleich, so sind es auch die ihnen gegenüberstehenden Seiten, das Dreieck ist gleichschenkelig.

Beweis. In dem Dreieck abc (Fig. 27) sei $\measuredangle x = \measuredangle y$. Man denke sich von c ein Perpendikel auf ab gefällt, so entstehen zwei Dreiecke, welche gleich sind, denn

$$dc = dc$$
$$z = t \quad \text{(als rechte)}$$
$$x = y$$
$$\overline{\text{also } \triangle\, acd = \triangle\, bcd \text{ (5. Fall).}}$$

Die beiden Dreiecke können aber nicht gleich sein, ohne daß die entsprechenden Seiten auch gleich sind, also $ac = cb$. Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke folgt auch, daß $ad = bd$. Das von der Spitze eines gleichschenkeligen Drejecks auf die Grundlinie gefällte Perpendikel halbirt also die Grundlinie.

13 **Lehrsatz.** In einem ungleichseitigen Dreiecke steht der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Beweis. Es sei in dem Dreieck abc (Fig. 28) $ac > ba$, so muß auch $\measuredangle x > \measuredangle y$. Dies zu beweisen, mache man $ad = ab$, und ziehe die Linie db, welche den Winkel x in zwei Theile t und z theilt. (Der Buchstabe z für den Winkel dbc ist in der Figur nicht eingetragen.) Da das Dreieck adb gleichschenkelig ist, so ist $v = t$; nun ist aber $v = y + z$ (§. 9), also auch $v > y$; da aber $t = v$, so ist auch $t > y$ und um so mehr noch $x > y$, da ja t nur ein Theil von x ist.

Da in einem Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenübersteht, so steht auch umgekehrt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Fig. 28.

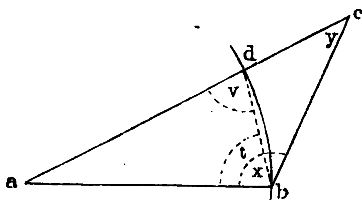
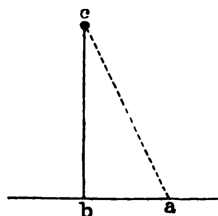


Fig. 29.



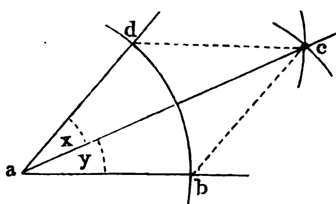
14 **Lehrsatz.** Wenn man von einem Punkte c (Fig. 29) ein Perpendikel cb auf eine gerade Linie fällt, so ist dies Perpendikel kürzer als jede andere gerade Linie ca, die man von c nach der Geraden ziehen kann.

Beweis. Das Dreieck bca hat bei b einen rechten Winkel, und da dieser der größte Winkel im Dreieck ist, so muß ihm auch die größte Seite gegenüberstehen, folglich $ca > cb$.

15 **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Man beschreibe um die Spitze a des Winkels (Fig. 30) einen Kreisbogen mit beliebigem Radius; dieser Kreisbogen schneidet die beiden Schenkel des Winkels in zwei Punkten d und b, welche gleichweit von a abstehen. Nun beschreibe man mit einer beliebigen Zirkelöffnung um d einen Kreisbogen, und mit derselben Zirkelöffnung einen anderen um b.

Fig. 30.



Von dem Durchschnittspunkt c dieser beiden letzteren Bogen ziehe man

eine Linie nach a, so wird diese den Winkel in zwei gleiche Theile theilen. Die Richtigkeit des Verfahrens zu beweisen, ziehe man die Hülfslinien cd und cb, so entstehen zwei Dreiecke, welche einander gleich sind, denn $ad = ab$, $dc = bc$, und ac ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich (I.). Ist aber das Dreieck abc dem Dreieck adc gleich, so müssen auch die entsprechenden Winkel gleich sein, folglich ist $\measuredangle x = \measuredangle y$.

Zur Uebung halbire man die Winkel in einigen der oben construirten Dreiecke.

Aufgabe. In einem Punkte a einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel zu errichten. 16

Auflösung. Man bezeichne mittelst des Zirkels auf der gegebenen Linie zwei Punkte, b und c (Fig. 31), welche gleichweit von a entfernt sind; beschreibe alsdann mit beliebiger Zirkelöffnung um c und mit derselben Zirkelöffnung um b einen Kreisbogen. Die von dem Durchschnittspunkt d derselben nach a gezogene Linie ist das verlangte Perpendikel.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, ziehe man die Linien bd und cd, so entstehen zwei Dreiecke, welche einander gleich sind, denn $bd = dc$, $ba = ca$, $da = da$ (I.). Ist aber $\triangle abd = \triangle acd$, so muß auch $\measuredangle x = \measuredangle y$ sein. Sind aber zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, folglich ad ein Perpendikel auf bc.

Fig. 31.

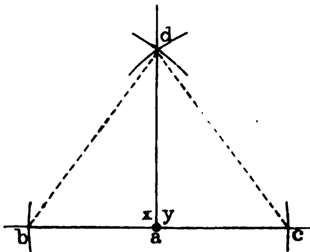
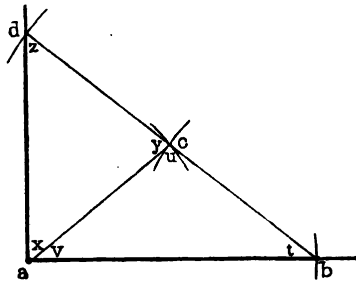


Fig. 32.



Aufgabe. Am Ende einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten, ohne die Linie zu verlängern. 17

Auflösung. Man schneide von dem Endpunkte a (Fig. 32) an, in welchem das Perpendikel errichtet werden soll, ein beliebiges Stück ab der gegebenen Linie ab, und errichte darüber ein gleichschenkeliges Dreieck abc, verlängere alsdann die Linie bc über c hinaus, und mache $cd = ca$; die von d nach a gezogene Linie ist das verlangte Perpendikel.

Beweis. $y = t + v$ (§. 9); da aber $t = v$ (§. 11), so ist auch $y = 2v$ oder $v = \frac{1}{2}y$.

Ferner ist $u = x + z$, und da $x = z$, so ist $u = 2x$, $x = \frac{1}{2}u$; demnach ist aber auch $v + x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}(u + y) = \frac{1}{2} . 2$ R. $= 1$ R., weil $u + y = 2$ R.

18 **Aufgabe.** Von einem Punkt c, welcher außerhalb einer gegebenen Linie liegt, ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Man beschreibe um den Punkt c (Fig. 33) mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der die gegebene Linie in zwei Punkten a und b schneidet; ferner beschreibe man mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen um a und mit derselben einen anderen um b. Die vom Durchschnittspunkt d derselben nach c gezogene Linie ist das verlangte Perpendikel.

Beweis. Man ziehe die Hülfslinien ca und cb, so ist nach §. 15 der Winkel acb halbirt, also $z = t$. Vergleichen wir nun die Dreiecke acf und bcf, so findet sich, daß sie gleich sind, denn $ca = cb$, $cf = cf$, $z = t$ (II.). Aus der Gleichheit dieser beiden Dreiecke aber folgt die Gleichheit der Winkel x und y.

Zur Uebung fälle man in einigen der oben construirten Dreiecke von jedem Eckpunkt ein Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite. Nimmt man irgend eine Seite eines Dreiecks als Grundlinie an, so heißt das von der gegenüberliegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Höhe des Dreiecks.

Fig. 33.

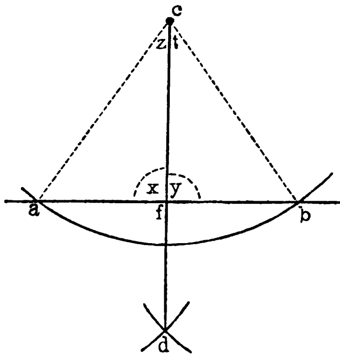
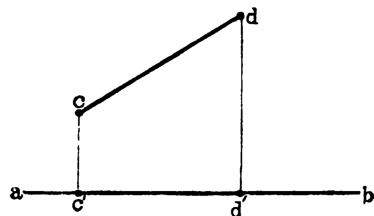


Fig. 34.



Anmerkung. Wenn man von einem Punkt c (Fig. 34) ein Perpendikel auf die Linie ab fällt, so wird der Fußpunkt c' dieses Perpendikels die Projection

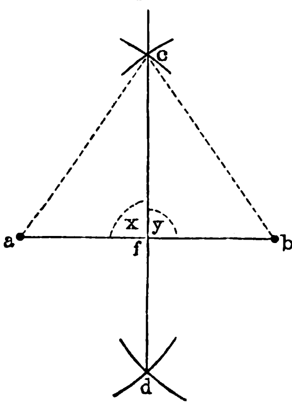
des Punktes c auf die Linie ab genannt; ebenso ist d' die Projection von d, und das Linienstück $c'd'$ ist die Projection der Linie cd auf die Linie ab.

In gleicher Weise kann man einen Punkt oder eine Linie auf eine Ebene projiciren. Wenn die Linie oder die Ebene, auf welcher die Fußpunkte der gefällten Perpendikel liegen, eine horizontale ist, so heißt die so erhaltene Projection eine Horizontalprojection.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ab (Fig. 35) zu halbiren. 19

Auflösung. Man beschreibe mit beliebiger aber gleicher Zirkelöffnung um a und b (Fig. 35) zwei Kreisbogen über ab. Der Durchschnittspunkt derselben sei mit c bezeichnet. Alsdann beschreibe man mit beliebigem aber gleichem Halbmesser um a und b Kreisbogen unterhalb ab; ihr Durchschnittspunkt sei mit d bezeichnet. Zieht man nun die Linie cd, so schneidet sie die gegebene in zwei gleiche Theile.

Fig. 35.



Beweis. Man ziehe ca und cb, o läßt sich, wie in §. 18, die Gleichheit der Dreiecke acf und bcf beweisen, woraus folgt, daß auch $af = bf$.

Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt aber auch, daß $\angle x = \angle y$; die Halbirungslinie cd steht also auf ab rechtwinkelig.

Zur Uebung halbire man die Seiten mehrerer der oben construirten Dreiecke.

Den Beschluß dieses Abschnitts mag die Auflösung folgender Aufgaben machen.

Dreiecke zu construiren, für welche gegeben ist:

1. $a \; b \; h$	4. $b \; B \; h$
2. $a \; B \; h$	5. $B \; C \; h$.
3. $b \; c \; h$	

Die Buchstaben a, b, c, B, C haben hier dieselbe Bedeutung wie oben; h bezeichnet die Höhe, d. h. die Länge des auf die Seite a von der ihr gegenüberliegenden Spitze gefällten Perpendikels. Die Angabe specieller Werthe für die gegebenen Stücke bleibt dem mündlichen Unterricht überlassen. Es ist nur noch zu bemerken, daß b sowohl als c größer sein müssen, als h, wenn eine Auflösung möglich sein soll. Warum?

Drittes Kapitel.

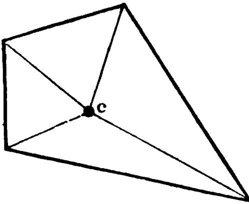
Vom Viereck.

20 **Die Winkel des Vierecks.** Ein Viereck ist eine von vier Seiten eingeschlossene ebene Figur. Jedes Viereck hat vier Winkel.

Die vier Winkel eines Vierecks betragen zusammengenommen vier Rechte.

Beweis. Man ziehe von irgend einem Punkte c im Inneren des Vierecks (Fig. 36) Linien nach den vier Eckpunkten, so entstehen vier Dreiecke. Die Summe der Winkel in jedem Dreieck beträgt 2 R., also die Summe der Winkel in allen vier Dreiecken 8 R. Zieht man von diesen 4 R. ab, welche um den Punkt c liegen, so bleiben 4 R. als Summe der Eckwinkel des Vierecks übrig.

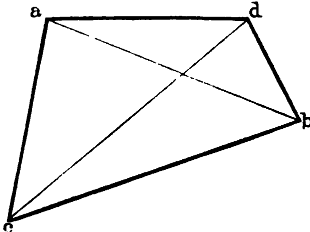
Fig. 36.



21 **Die Diagonale.** Jede von einem Eckpunkt des Vierecks durch die Figur zum gegenüberstehenden Eck gezogene Linie heißt Diagonale.

In einem jeden Viereck kann man zwei Diagonalen ziehen; in dem Viereck (Fig. 37) z. B. ist ab die eine, cd die andere Diagonale.

Fig. 37.



22 **Das Parallelogramm.** Sind je zwei Seiten eines Vierecks einander parallel, wie in Fig. 38 und Fig. 39, so heißt die Figur Parallelogramm. Nennen wir die Grundlinie eines Parallelogramms a, die ihr gegenüberstehende a', die Seite links b, die ihr gegenüberstehende b', so müssen a und a', b und b' parallel sein. Den Winkel, den die Seiten a und b

mit einander machen, wollen wir in den folgenden Beispielen mit x bezeichnen.

Fig. 38.

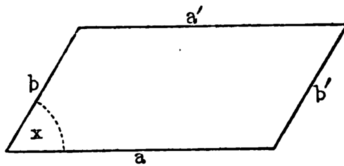
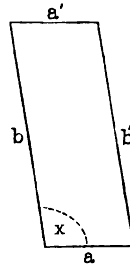


Fig. 39.



Zur Uebung construire man folgende Parallelogramme:

	a	b	x		a	b	x
1.	2''	3''	50°	5.	2''	3''	60°
2.	3''	2''	120°	6.	3''	3''	100°
3.	1''	2''	70°	7.	2''	3''	120°
4.	3''	1''	100°	8.	4''	3''	77°

Hat man die Seiten a und b im gehörigen Winkel aneinander gesetzt, so vollendet man das Parallelogramm, indem man a' mit a und b' mit b parallel zieht.

Aus §. 7 folgt, daß die beiden Winkel eines Parallelogramms, welche an derselben Seite liegen, zusammen 2 R. betragen, woraus sich auch ergiebt, daß die gegenüberstehenden Winkel eines Parallelogramms gleich sind.

Lehrsatz. Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei gleiche Dreiecke getheilt. 23

Beweis. Man ziehe in dem Parallelogramm $pqrs$ (Fig. 40) die Diagonale ps, so ist das Dreieck prs gleich pqs, denn

$$ps = ps$$
$$\left.\begin{array}{l} y = z \\ x = t \end{array}\right\} \text{als Wechselwinkel,}$$

also $\triangle\, prs = \triangle\, pqs$ (IV.)

Da aber diese Dreiecke einander gleich sind, so müssen auch die entsprechenden Seiten einander gleich sein; also $rs = pq$, $pr = qs$.

Fig. 40.

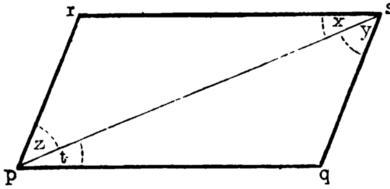
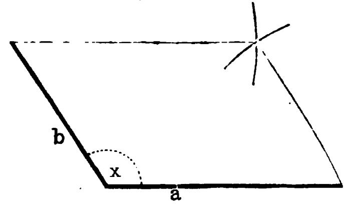


Fig. 41.



Die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms sind also nicht allein parallel, sondern auch gleich.

Demnach kann man, wenn man die Seiten a und b im gehörigen Winkel zusammengestellt hat, das Parallelogramm auch mit Hülfe von Kreisbogen, deren Radien a und b sind, vollenden, wie in Fig. 41 angedeutet ist. Nach dieser Methode construire man folgende Parallelogramme:

	a	b	x
1.	2″	2″	100°
2.	3″	3″	60°
3.	3″	2″	90°
4.	3″	2″	134°

24 **Die Höhe des Parallelogramms.** Betrachtet man a als die Grundlinie des Parallelogramms, so ist ein von irgend einem Punkte der Seite a' auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefälltes Perpendikel h

Fig. 42.

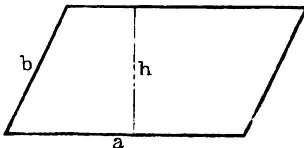
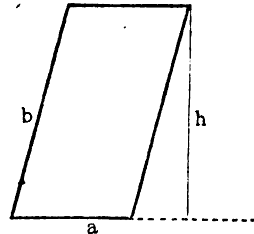


Fig. 43.



(Fig. 42 und Fig. 43) die Höhe des Parallelogramms. Wie groß ist die Höhe der nach obigen Angaben construirten Parallelogramme?

Zur Uebung construire man noch folgende Parallelogramme:

	a	b	h		a	h	x
1.	2″	3″	2″3‴	4.	3″	2″	110°
2.	3″	2″	1″	5.	2″	3″	48°
3.	4″	3″	2″	6.	4″	2″	72°

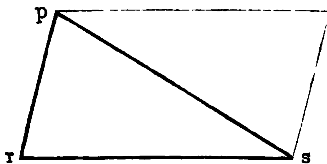
Betrachtet man b als Grundlinie, so ist ein von irgend einem Punkte der Seite b' auf b oder dessen Verlängerung gefälltes Perpendikel h' die Höhe des Parallelogramms. Wie groß ist in diesem Falle die Höhe der construirten Parallelogramme?

Zur Uebung construire man noch folgende Parallelogramme, in welchen die Länge des von b' auf b gefällten Perpendikels h' gegeben ist.

	b	h'	x
1.	3″	2″	120°
2.	2″	3″	60°
3.	4″	3″	113°

Zieht man durch den Eckpunkt p des Dreiecks prs (Fig. 44) eine Linie parallel mit rs, durch s eine andere parallel mit rp, so entsteht ein Parallelogramm, welches mit dem Dreieck gleiche Grundlinie und Höhe hat. Nach §. 23 aber ist das Dreieck prs die Hälfte dieses Parallelogramms.

Fig. 44.



Ein Dreieck ist also die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

25 **Quadrat, Raute, Rechteck und Trapez.** Sind die vier Seiten eines Parallelogramms einander gleich und alle Winkel rechte, wie Fig. 45, so heißt es Quadrat. Welche der oben construirten Parallelogramme sind Quadrate?

Fig. 45.

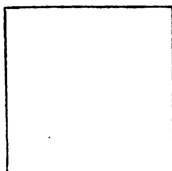
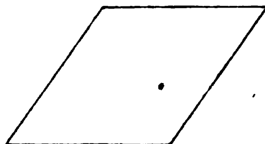


Fig. 46.



Sind die vier Seiten eines Parallelogramms einander gleich, ohne daß die Winkel rechte sind, wie Fig. 46, so heißt die Figur Rhombus oder Raute. Welche der construirten Figuren sind Rauten?

Sind alle Winkel eines Parallelogramms rechte, ohne daß alle Seiten gleich sind, wie Fig. 47, so heißt es längliches Rechteck oder Rectangel. Welche der construirten Figuren sind längliche Rechtecke?

Fig. 47.



Fig. 48.

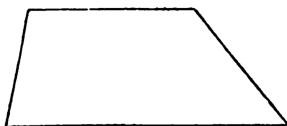
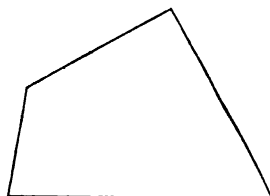


Fig. 49.



Sind in einer vierseitigen Figur zwei Seiten parallel, die beiden anderen aber nicht, wie Fig. 48, so heißt sie Paralleltrapez oder Trapezoid.

Zur Uebung zeichne man einige Trapezoide.

Ist in einer vierseitigen Figur keine Seite mit einer anderen parallel, wie Fig. 49, so heißt sie Trapez

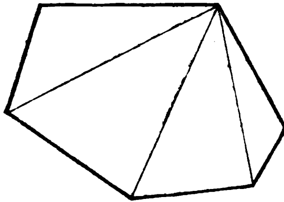
Viertes Kapitel.

Von den Vielecken.

Die Diagonalen der Vielecke. Vielecke nennt man zwar im Allgemeinen alle von geraden Linien begränzten ebenen Figuren; vorzugsweise jedoch bezeichnet man nur diejenigen damit, welche mehr als vier Ecken haben; also Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke u. s. w. 26

Von jedem Eckpunkte eines Sechsecks (Fig. 50) lassen sich fünf Linien nach den übrigen fünf Eckpunkten, von jedem Zehneckspunkte neun Linien nach den übrigen neun Eckpunkten der Figur ziehen u. s. w. Man kann allgemein sagen: hat ein Vieleck n Seiten, so kann man von einem Eckpunkte aus nach den übrigen $n - 1$ Ecken, $n - 1$ Linien ziehen. Die zwei äußersten dieser Linien gehören zu den Umgränzungslinien der Figuren, die $n - 3$ übrigen sind Diagonalen. In einem Vieleck von n Seiten kann man also von einem Eckpunkte aus $n - 3$ Diagonalen ziehen.

Fig. 50.



Wieviel Diagonalen kann man von einem Eckpunkte aus in einem Siebeneck, Achteck u. s. w. ziehen?

Dieser Satz gilt für alle Vielecke, also auch für Dreiecke und Vierecke. Für ein Dreieck ist demnach die von einem Eckpunkte aus gezogene Anzahl der Diagonalen $3 - 3 = 0$, für das Viereck $4 - 3 = 1$.

Durch die von einem Eckpunkte aus gezogenen Diagonalen wird ein Vieleck in Dreiecke zerlegt, und zwar das Sechseck in vier, das Achteck in sechs, das Zwölfeck in zehn; oder allgemein: Jedes Vieleck von n Seiten wird durch die $n - 3$ Diagonalen, die man von einem Eckpunkte aus ziehen kann, in $n - 2$ Dreiecke zerlegt. Man kann sich von der allgemeinen Richtigkeit dieser Behauptung durch folgende Betrachtung überzeugen. Zieht man die erste Diagonale, so wird ein Dreieck von der Figur abgeschnitten, durch eine zweite ein zweites, durch eine dritte ein drittes u. s. w. Hat man so alle Diagonalen, bis auf die

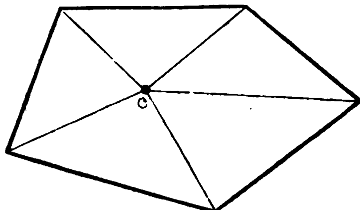
letzte, also $n - 4$ Diagonalen, gezogen, so hat man von der Figur $n - 4$ Dreiecke abgeschnitten, und es bleibt nur noch ein Viereck übrig, welches durch die letzte Diagonale in zwei Dreiecke getheilt wird, so daß man in Allem $n - 4 + 2 = n - 2$ Dreiecke hat.

In wieviel Dreiecke wird durch die von einem Eckpunkte aus gezogenen Diagonalen, ein Zehneck, ein Fünfzehneck, ein Zwanzig-, Dreißig-, Vierzigeck zerlegt?

27 **Eckwinkel.** Die Summe aller Eckwinkel in einem Vieleck von n Seiten ist $n \cdot 2$ R. $-$ 4 R., oder, was dasselbe ist, $n \cdot 180^\circ - 360^\circ$

Dies zu beweisen, denke man sich von irgend einem Punkte c im Inneren des Vielecks (z. B. des Fünfecks Fig. 51) Linien nach den Eckpunkten gezogen, so entstehen n (in unserem Beispiel Fig. 51 fünf) Dreiecke. Die Summe aller Winkel in allen Dreiecken beträgt n . 2 R. (in unserem Beispiel 5 . 2 R.). Zieht man von diesen 4 R. ab, als Summe der Winkel, welche um den Punkt c herum liegen, so bleibt für die Eckwinkel der Figur n . 2 R. $-$ 4 R. (in unserem Beispiel also 5 . 2 R. $-$ 4 R. = 6 R.).

Fig. 51.



Wie groß ist die Summe der Eckwinkel in einem Sechs-, Zehn-, Zwölfeck u. s. w.?

Ein regelmäßiges Vieleck ist ein solches, in welchem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

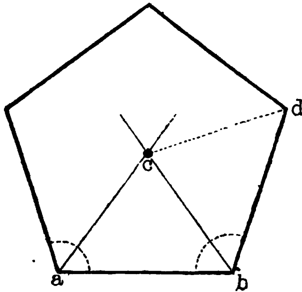
Da alle Winkel eines regelmäßigen Vielecks einander gleich sind, so ist ein jeder dieser Winkel der $n$te Theil von der Summe aller Eckwinkel, also $\frac{n \cdot 2\,R. - 4\,R.}{n}$. Der Eckwinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist also $\frac{5 \cdot 2\,R. - 4\,R.}{5} = {}^6/_5\,R. = 108^\circ$.

Wie groß ist der Eckwinkel eines regelmäßigen Sechsecks, Siebenecks u. s. w.?

Mit Hülfe der so berechneten Eckwinkel construire man ein regelmäßiges Fünfeck, Sechseck, Achteck, Zehneck, dessen Seite 35^{mm} beträgt.

Mittelpunktswinkel. Halbirt man in einem regelmäßigen Vieleck zwei auf einander folgende Eckwinkel, bei b und a Fig. 52, so schneiden sich die beiden Halbirungslinien in einem Punkte c und bilden ein gleichschenkeliges Dreieck (warum?). Zieht man von c aus nach dem zunächst bei a oder bei b liegenden Winkelpunkte, z. B. nach d, eine gerade Linie, so entsteht das Dreieck bcd, welches dem ersteren gleich (warum?), also ebenfalls gleichschenkelig ist, also $cd = cb = ca$. Auf diese Weise kann man zeigen, daß alle von c aus nach den Eckpunkten gezogenen Linien einander gleich sind. Beschreibt man also um c mit dem Radius ca einen Kreis, so geht derselbe durch alle Eckpunkte des Vielecks. 28

Fig. 52.



Die sämmtlichen Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks liegen also auf einem Kreise, dessen Centrum der Punkt ist, in welchem sich die Halbirungslinien zweier Eckwinkel schneiden.

Zieht man von dem Mittelpunkte eines regelmäßigen Vielecks Linien nach den Eckpunkten, so müssen, wie leicht zu beweisen ist, alle dadurch gebildeten um den Mittelpunkt c liegenden Winkel einander gleich sein. Der Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist demnach $\frac{4\ \text{R.}}{5}$, eines regelmäßigen Sechsecks $\frac{4\ \text{R.}}{6}$, eines regelmäßigen n Ecks $\frac{4\ \text{R.}}{n}$.

Mit Hülfe dieses berechneten Mittelpunktswinkels kann man ebenfalls ein regelmäßiges Vieleck construiren, wenn der Radius des umschriebenen Kreises gegeben ist. Soll z. B. ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis construirt werden, dessen Radius 2″ ist, so ziehe man zuerst den Kreis, dann von seinem Mittelpunkte aus 5 Radien, deren jeder mit dem folgenden einen Winkel von $\frac{4}{5}$ R. $= 72^0$ macht, so findet man die Eckpunkte des verlangten Fünfecks.

In einen Kreis, dessen Radius 2″ beträgt, ein regelmäßiges Sechseck, Achteck, Zehneck u. s. w. zu zeichnen.

Construction regelmässiger Vielecke. Bisher haben wir die Vielecke immer nur mit Hülfe des Transporteurs construirt. Da aber jedes 29

Instrument der Art mehr oder weniger ungenau ist, so ist eine mit Hülfe des Transporteurs gemachte Zeichnung nicht so genau, als wenn man denselben hätte entbehren und nur Zirkel und Lineal hätte anwenden können. Eine ähnliche Betrachtung hätten wir schon oben anstellen können. Wir können nämlich auf dreierlei Weise ein Perpendikel ziehen, erstens mit Hülfe des Transporteurs, zweitens mit Hülfe des Winkelhakens, drittens durch die in §. 16, 17 und 18 angegebene Construction. Letzteres Verfahren ist ohnstreitig das genauste, weil es von den Unrichtigkeiten der Instrumente unabhängig ist. Könnte man ein Verfahren ausfindig machen, nur mit Hülfe des Zirkels und Lineals ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, so wäre es jedenfalls den oben angegebenen vorzuziehen. Für einige Vielecke giebt es nun solche Constructionsarten.

Wie ein regelmäßiges (gleichseitiges) Dreieck construirt wird, haben wir schon oben gesehen. Beschreibt man um das gleichseitige Dreieck einen Kreis, zieht von dem Mittelpunkte des Kreises nach den drei Eckpunkten Radien, so bilden diese drei Radien 3 gleiche Winkel. Halbirt man jeden dieser drei Winkel, so steht jede Halbirungslinie senkrecht auf einer Dreiecksseite. Zieht man von einem jeden der drei Punkte, in welchen die drei Halbirungslinien den Kreis treffen, Linien nach den beiden zunächst liegenden Dreieckspunkten, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck. Halbirt man den Mittelpunktswinkel des regelmäßigen Sechsecks, so treffen die Halbirungslinien den Kreis in sechs Punkten; zieht man von jedem derselben Linien nach den beiden zunächst liegenden Sechseckspunkten, so erhält man ein regelmäßiges Zwölfeck. Auf dieselbe Weise erhält man aus dem regelmäßigen Zwölfeck ein regelmäßiges Vierundzwanzigeck u. s. w.

Nach diesen Angaben construire man, von einem gleichseitigen Dreieck ausgehend, in welchem jede Seite 3'' ist, ein regelmäßiges Sechs-, Zwölf- und Vierundzwanzigeck.

Ein regelmäßiges Viereck ist nichts anderes als ein Quadrat; wie es construirt wird, haben wir §. 22 und 23 gesehen. Die beiden Diagonalen schneiden sich im Mittelpunkte und stehen rechtwinkelig auf einander. Man kann demnach leicht in einen Kreis ein Quadrat zeichnen, wenn man nur in dem Kreise zwei Durchmesser construirt, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden. Die vier Punkte, in denen diese Durchmesser die Peripherie treffen, sind die vier Eckpunkte des Quadrats. Vom Quadrate ausgehend, kann man auf die oben angedeutete Weise ein in denselben Kreis beschriebenes Achteck, Sechszehneck u. s. w. construiren.

Man führe diese Construction aus, von einem Quadrate ausgehend, an welchem jede Seite 3'' ist.

Es giebt zwar auch ein Verfahren, ein regelmäßiges Fünfeck ohne Transporteur zu construiren, es ist aber etwas verwickelt und setzt die Kenntniß von Sätzen voraus, die bis jetzt hier noch nicht bewiesen worden sind, weshalb es übergangen werden muß. Vom Fünfeck ausgehend, kann man aber leicht ein regelmäßiges Zehn-, Zwanzig-, Vierzigeck u. s. w. construiren.

Wie jedes regelmäßige Vieleck, so wird auch das regelmäßige Sechseck durch die von dem Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen Radien in gleichschenkelige Dreiecke zerlegt; die beiden Winkel eines jeden dieser Dreiecke, welche an der Vielecksseite liegen, sind einander gleich. Der der Sechsecksseite gegenüberliegende Mittelpunktswinkel eines solchen Theil-Dreiecks beträgt $^4/_6$ R. = $^2/_3$ R.; da alle Winkel eines Dreiecks 2 R. betragen, so bleibt für die beiden an der Sechsecksseite liegenden Winkel 2 R. — $^2/_3$ R. = $^4/_3$ R., mithin ist jeder derselben $^2/_3$ R. oder 60°; demnach sind alle Winkel eines solchen Dreiecks einander gleich, das Dreieck ist also gleichseitig, die Sechsecksseite also gleich dem Radius des umschriebenen Kreises.

Nach diesem Satze ist es sehr leicht, ein regelmäßiges Sechseck in einen gegebenen Kreis zu ziehen.

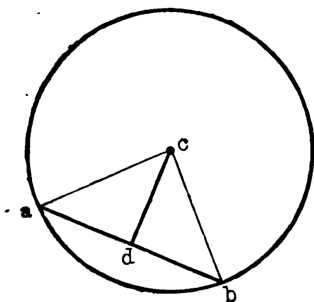
Fünftes Kapitel.

Vom Kreise.

Sehnen. Zu der schon oben gegebenen Definition des Kreises wollen 30
wir hier nur noch hinzufügen, daß man ihn als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten kann. In dem Folgenden sollen nun noch die wichtigsten Beziehungen zwischen dem Kreise und einer oder mehreren geraden Linien betrachtet werden.

Lehrsatz. Zieht man von dem Halbirungspunkte *d* einer Sehne *ab*, Fig. 53, eine gerade Linie *dc* nach dem Mittelpunkte des Kreises, so steht sie rechtwinkelig auf der Sehne.

Fig. 53.



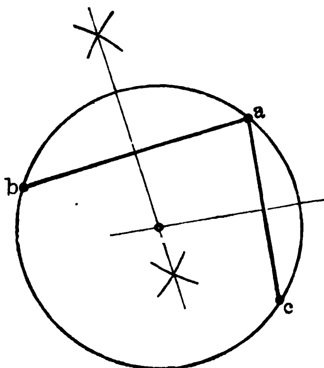
Beweis. Man ziehe die beiden Radien *ac* und *bc*, so entstehen zwei Dreiecke, deren Gleichheit leicht nachzuweisen ist, und aus der dann die Gleichheit der beiden Nebenwinkel bei *d* folgt.

Es folgt daraus auch, daß ein vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefälltes Perpendikel dieselbe halbirt, und daß ein in dem Halbirungspunkte der Sehne errichtetes Perpendikel durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Auf dem zuletzt ausgesprochenen Satze beruht ein Verfahren, den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden. Man hat nur zwei beliebige Sehnen im Kreise zu ziehen und diese nach §. 19 zu halbiren; der Punkt, in welchem sich die Halbirungslinien schneiden, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Aufgabe. Durch drei beliebig gegebene Punkte *a*, *b* und *c* (Fig. 54) einen Kreis zu ziehen.

Fig. 54.



Auflösung. Man ziehe von einem der gegebenen Punkte, z. B. von *a*, Linien nach den beiden anderen, so werden die beiden Linien *ab* und *ac* Sehnen des Kreises sein müssen; halbirt man also nach §. 19 die beiden Linien *ab* und *ac*, so ist der Punkt, in welchem sich die beiden Halbirungsperpendikel schneiden, der gesuchte Mittelpunkt. Auf diese Weise kann man durch die Eckpunkte eines jeden beliebigen Dreiecks einen Kreis ziehen.

Zur Uebung ziehe man einen Kreis durch die Eckpunkte mehrerer der oben construirten Dreiecke.

Ist ein Kreis durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks gezogen, so sind die drei Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreises; folglich müssen auch die drei in der Mitte der Dreiecksseiten errichteten Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden, welcher der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist.

Durch drei in einer geraden Linie liegende Punkte läßt sich kein Kreis legen. Warum nicht? Wenn der Radius des umschriebenen Kreises gegeben ist, so ist ein Dreieck schon bestimmt, wenn man außerdem nur noch zwei andere Bestimmungsstücke kennt, z. B. zwei Seiten, oder eine Seite und einen an derselben anliegenden Winkel, die Grundlinie und die Höhe u. s. w. Zur Uebung construire man folgende Aufgaben:

	R	*a*	*b*		*R*	*a*	*C*
1.	2″	2″	1″	4.	2″	2″	60°
2.	1″ 5‴	4″	2″ 3‴	5.	2″	3″	170°
3.	1″	2″	1″ 4‴	6.	1″	1″ 2‴	118°

	R	*a*	*h*
7.	2″	2″	2″
8.	1″ 5‴	2″	1″ 7‴
9.	1″	1″ 4‴	1″ 8‴

R bezeichnet hier den Radius des umschriebenen Kreises, *h* die Höhe des Dreiecks; die anderen Buchstaben haben die schon früher angegebene Bedeutung. Eine der drei ersten Aufgaben ist unmöglich, eine läßt zwei Auflösungen zu. Warum? Eben so ist eine der drei folgenden Aufgaben und eine der drei letzten unmöglich.

Centri- und Peripheriewinkel. Zieht man von dem Mittelpunkte *c* eines Kreises zwei Radien *ca* und *cb* (die Figur kann sich Jeder selbst entwerfen), so bilden dieselben einen Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt ist, und dessen Schenkel den Bogen *ab* einschließen. Man nennt einen solchen Winkel einen Centriwinkel, welcher auf dem Bogen *ab* steht.

Zieht man von irgend einem Punkte d der Peripherie (der aber nicht auf dem Bogen ab selbst liegt) zwei Linien nach a und b, so bilden sie einen Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel denselben Bogen ab einschließen. Ein solcher Winkel heißt **Peripheriewinkel**.

In Beziehung auf die Lage der Peripheriewinkel kann man drei Fälle unterscheiden. Der Mittelpunkt des Kreises liegt entweder 1) auf dem einen Schenkel des Peripheriewinkels, 2) er liegt innerhalb, oder 3) er liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels.

Ein Peripheriewinkel ist immer halb so groß als der Centriwinkel, der mit ihm auf einem Bogen steht.

Der Beweis dieses Satzes muß für jeden der drei Fälle besonders geführt werden.

1) Der Peripheriewinkel y und der Centriwinkel x (Fig. 55) stehen auf demselben Bogen. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf dem einen

Fig. 55.

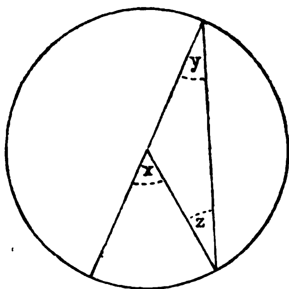
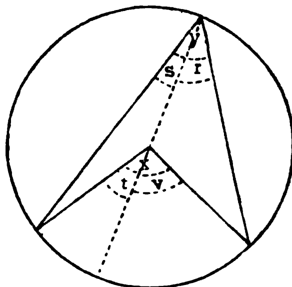


Fig. 56.



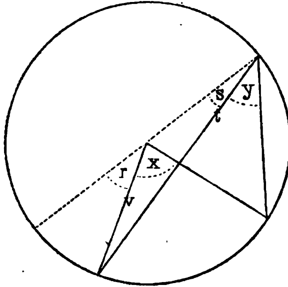
Schenkel des Peripheriewinkels. Nach §. 9 ist $x = y + z$; nach §. 11 aber ist $z = y$, also $x = 2y$.

2) Der Peripheriewinkel y (Fig. 56) und der Centriwinkel x stehen auf demselben Bogen; der Mittelpunkt des Kreises liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels. Man ziehe von der Spitze des Peripheriewinkels eine gerade Linie durch den Mittelpunkt, so wird durch dieselbe y in zwei Theile r und s, x aber in die zwei Theile v und t getheilt. Nach dem eben gelieferten Beweise aber ist $t = 2s$, $v = 2r$, folglich $t + v = 2s + 2r = 2(s + r)$ oder $x = 2y$.

3) Der Centriwinkel x (Fig. 57) und der Peripheriewinkel y stehen

auf demselben Bogen, der Mittelpunkt des Kreises aber liegt außerhalb der Schenkel des letzteren. Man ziehe eine gerade Linie von der Spitze des Winkels y über den Mittelpunkt. Nach dem obigen Beweise ist $v = 2t$, $r = 2s$, folglich $v - r = 2t - 2s = 2(t - s)$ und daraus endlich $x = 2y$.

Fig. 57.



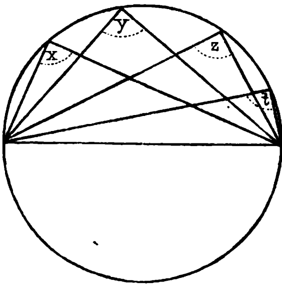
Da nun die Wahrheit dieses Satzes für alle drei Fälle bewiesen ist, so kann man leicht folgern, daß alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, einander gleich sind.

Wenn ein Peripheriewinkel ein spitzer Winkel ist, so ist der Bogen, auf dem er steht, jedenfalls kleiner als ein Halbkreis.

Der Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise steht, ist ein rechter, oder mit anderen Worten, zieht man von irgend einem Punkte der Peripherie Linien nach den beiden Endpunkten eines Durchmessers, so bilden dieselben einen rechten Winkel.

So ist also jeder der vier Winkel x, y, z und t in Fig. 58 ein rechter.

Fig. 58.



Der Bogen, auf dem ein stumpfer Peripheriewinkel steht, ist größer als ein Halbkreis.

Ist der Radius des Kreises und die Größe des Peripheriewinkels bestimmt, so ist auch die Sehne des Bogens bestimmt, auf welchem der Peripheriewinkel steht.

Man zeichne in einem Kreise, dessen Radius 1″ ist, einen Peripheriewinkel von 18°, 43°, 73°, 98°, 124°, 160°. Wie groß sind die Sehnen der Bogen, auf welchen diese Peripheriewinkel stehen?

Die erwähnte Sehne a bildet mit den beiden Schenkeln des Peripheriewinkels ein Dreieck, welches aber durch den Radius des Kreises R,

die Sehne a und den Peripheriewinkel A noch nicht völlig bestimmt ist, weil, wenn die Sehne a gezogen ist, die Lage des dritten Eckpunktes noch beliebig auf der Peripherie genommen werden kann. Die drei Bestimmungsstücke R, a und A sind auch eigentlich nur als zwei zu betrachten, weil a durch A und umgekehrt A durch a bestimmt ist. Ist A gegeben, so ist a nicht mehr willkürlich.

Nach diesen Bemerkungen wird es wohl leicht sein, folgende Dreiecke zu construiren.

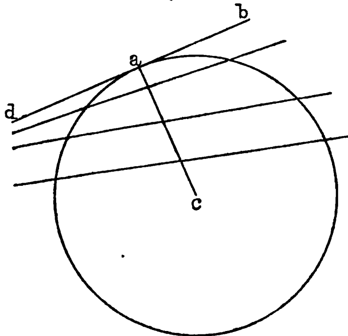
	R	b	A		R	A	B
1.	1″	1″ 5‴	40°	4.	1″	40°	80°
2.	1″ 2‴	2″	120°	5.	1″ 3‴	70°	60°
3.	1″ 3‴	1″	113°	6.	1″ 8‴	110°	36°

	R	A	h
7.	1″	60°	1″ 8‴
8.	1″ 4‴	75°	1″ 2‴
9.	2″	117°	1″

Die Auflösung einiger dieser Aufgaben ist unmöglich. Welche sind es? Warum ist die Lösung unmöglich?

32 **Die Tangente.** Wenn eine gerade Linie einen Kreis in zwei Punkten schneidet, so fällt nothwendig ein Stück derselben in den Kreis. Je mehr sich die beiden Durchschnittspunkte einander nähern, desto kleiner wird das in den Kreis fallende Stück der schneidenden Linie; fallen die beiden Durchschnittspunkte in einen, etwa den Punkt a (Fig. 59) zusammen, so hat die gerade Linie nur einen Punkt mit dem Kreise gemein, sie berührt den Kreis nur in einem Punkte und heißt deshalb Tangente oder Berührende. Kein Punkt der Tangente liegt innerhalb des Kreises.

Fig. 59.



Unter allen Punkten der Tangente *db* (Fig. 59) liegt der Berührungspunkt *a* dem Mittelpunkte des Kreises am nächsten. Ein vom Mittelpunkte zum Berührungspunkte *a* gezogener Radius ist also die kürzeste Entfernung des Mittelpunkts von der Tangente, dieser Radius steht also rechtwinkelig auf der Tangente. (§. 13.)

Daraus ergiebt sich ein leichtes Verfahren, in irgend einem Punkte der Peripherie eine Tangente an den Kreis zu ziehen. Man ziehe nur einen Radius nach dem gegebenen Berührungspunkte, und alsdann durch den Berührungspunkt eine Linie, welche rechtwinkelig auf diesem Radius steht, so ist sie die verlangte Tangente.

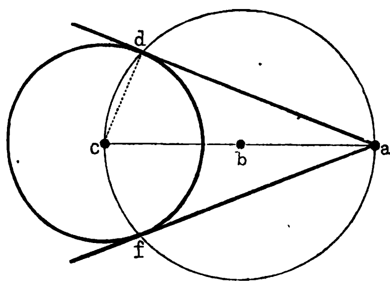
Aufgaben. Man ziehe durch einen Kreis, dessen Radius 1″ ist, zwei zu einander rechtwinkelige Durchmesser. In den vier Punkten, in welchen sie die Peripherie treffen, ziehe man Tangenten an den Kreis, so werden diese vier Tangenten ein um den Kreis beschriebenes Quadrat bilden.

Man ziehe vom Mittelpunkte des Kreises aus fünf Radien, deren jeder mit dem folgenden einen Winkel = $^4/_5$ R. macht. Zieht man in den fünf Punkten, in welchen diese Radien den Kreis treffen, Tangenten an denselben, so bilden diese fünf Tangenten ein regelmäßiges um den Kreis beschriebenes Fünfeck.

Auf dieselbe Weise construire man ein regelmäßiges um den Kreis beschriebenes Sechseck, Achteck, Zehneck u. s. w.

Aufgabe. Durch einen Punkt *a*, Fig. 60, außerhalb des um *c* beschriebenen Kreises eine Tangente an diesen Kreis zu ziehen.

Fig. 60.



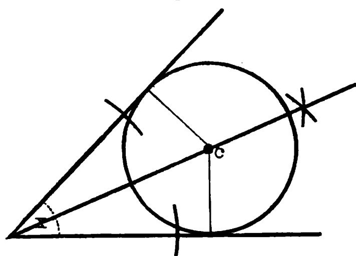
Auflösung. Man ziehe von dem gegebenen Punkte *a* (Fig. 60) eine gerade Linie nach dem Mittelpunkte *c* des gegebenen Kreises, halbire diese Linie und beschreibe um den Halbirungspunkt *b* einen Kreis mit dem Radius *bc*. Wo dieser Kreis den gegebenen schneidet, ist der Berührungspunkt. Der um *b* gezogene Kreis schneidet aber den gegebenen

in zwei Punkten *d* und *f*. Man kann also von *a* aus zwei Tangenten an den Kreis ziehen, die eine berührt ihn in *d*, die andere in *f*.

Um zu beweisen, daß *ad* und *af* wirklich Tangenten sind, hat man nur zu zeigen, daß *ad* mit dem Radius *cd*, und *af* mit dem Radius *cf* einen rechten Winkel macht. Der Winkel *cda* aber sowohl wie der Winkel *cfa* sind aber rechte, weil jeder ein auf einem Halbkreise stehender Peripheriewinkel ist.

Die beiden Tangenten machen einen Winkel mit einander, der um so spitzer wird, je weiter sich der Punkt *a* von dem Kreise entfernt. Dieser Winkel wird durch die Linie *ac* halbirt. Man kann daraus schließen, daß der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels berühren soll, auf der Halbirungslinie dieses Winkels liegen muß. Um also einen Kreis zu ziehen, welcher die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels *x* (Fig. 61) zugleich berührt, hat man nur den Winkel zu halbiren. Jeder Punkt der Halbirungslinie kann zum Mittelpunkte eines Kreises genommen werden, welcher die verlangte Eigenschaft hat. Hat man irgend einen Punkt *c* der Halbirungslinie zum Mittelpunkte gewählt, so ist das von diesem Punkte auf den einen Schenkel des Winkels gefällte Perpendikel der Radius des verlangten Kreises.

Fig. 61.



Die Perpendikel, welche man von irgend einem Punkte der Halbirungslinie auf die beiden Schenkel des gegebenen Winkels fällen kann, sind natürlich gleich, und machen einen Winkel mit einander, welcher den gegebenen Winkel zu 2 R. ergänzt.

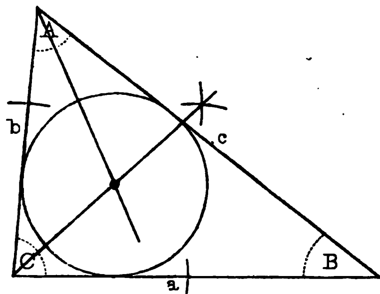
Wenn der Radius des Kreises gegeben ist, welcher die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels berühren soll, so kann der Mittelpunkt nicht mehr willkürlich auf der Halbirungslinie genommen werden, er liegt auf dem Durchschnitt der Halbirungslinie mit einer anderen geraden Linie, die man mit dem einen Schenkel des Winkels parallel gezogen hat, und deren Entfernung von diesem Schenkel dem gegebenen Radius gleich ist.

Beispiele. Einen Kreis zu ziehen, dessen Radius 1″ ist, und

welcher die beiden Schenkel eines Winkels von 119° berührt; einen andern Kreis zu ziehen, dessen Radius 1″4‴ ist, und welcher die beiden Schenkel eines Winkels von 63° berührt.

Soll ein Kreis zugleich die beiden Seiten *a* und *b* eines Dreiecks (Fig. 62) berühren, so muß sein Mittelpunkt auf der Halbirungslinie des Winkels *C* liegen; der Mittelpunkt eines Kreises aber, der zugleich die beiden Seiten *b* und *c* berührt, liegt auf der Halbirungslinie des Winkels *A*. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Halbirungslinien ist daher der Mittelpunkt eines Kreises, der zu gleicher Zeit die drei Seiten des Dreiecks berührt. Sein Radius ist das von dem Mittelpunkte auf eine Dreiecksseite gefällte Perpendikel. Auf diese Weise läßt sich in jedes Dreieck ein Kreis beschreiben, welcher die drei Seiten berührt.

Fig. 62.



Da dieser Kreis die beiden Seiten *a* und *c* berührt, so muß also auch sein Mittelpunkt auf der Halbirungslinie des Winkels *B* liegen, woraus folgt, daß sich die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks in einem Punkte schneiden.

Zur Uebung ziehe man in mehrere der oben construirten Dreiecke Kreise, welche die drei Seiten berühren.

Der Radius *r* des inbeschriebenen Kreises kann eines der nöthigen Bestimmungsstücke eines Dreiecks ersetzen, wie durch die Ausführung der folgenden Beispiele klar werden wird.

Man construire folgende Dreiecke, für welche ist:

r	a	C	r	B	C
1″	2″	60°	1″	60°	70°
1″	2″ 3‴	112°	1″ 2‴	40°	60°
8‴	2″	97°	7‴	110°	30°

r	h	C
1″	2″	112°
1″ 1‴	3″	80°
9‴	1″ 5‴	47°

Anmerkung. Bei Auflösung dieser Aufgaben wird man mit großem Vortheil von dem Satze Gebrauch machen können, daß wenn ein Kreis die beiden Schenkel eines Winkels berührt, und man von dem Mittelpunkte des Kreises Radien zu den Berührungspunkten zieht, daß alsdann der Winkel der beiden Radien 2 R. — N ist, wenn man mit N die Gradzahl des gegebenen Winkels bezeichnet. Beträgt z. B. der gegebene Winkel 60°, so ist der Winkel dieser beiden Radien 180° — 60° = 120°. [Vergleiche §. 32 S. 44 unten.]

Sechstes Kapitel.

Berechnung des Flächeninhalts geradliniger ebener Figuren.

33 **Flächenmaasse.** Den Flächeninhalt einer ebenen Figur zu bestimmen, heißt sehen, wie oft eine Fläche von bekannter Größe in derselben enthalten ist. Diese Fläche von bekannter Größe ist die Einheit des Flächenmaaßes. Man nimmt allgemein ein Quadrat, dessen Seite

der *Längeneinheit gleich ist*, als *Einheit des Flächenmaaßes* an. Da man verschiedene Längeneinheiten hat, so hat man auch verschiedene Flächeneinheiten, als: *Quadratmeile*, *Quadratfuß*, *Quadratzoll*, *Quadratlinie*, *Quadratmeter* u. s. w., welche nichts anderes als Quadrate sind, deren Seite eine Meile, ein Fuß, ein Zoll, eine Linie, ein Meter u. s. w. ist.

Fig. 63 ist ein Quadratzoll (1 □''), Fig. 64 ist eine Quadratlinie (1□''') altfranzösisches Maaß; Fig. 65 ist ein Quadratcentimeter (1□^{cm}).

Fig. 63.



Fig. 66.

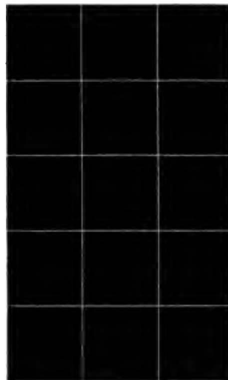


Fig. 64.



Fig. 65.



Nichts ist nach dieser Erklärung leichter, als den Inhalt eines länglichen Rechtecks zu finden, wenn die Grundlinie und die Höhe, durch die Längeneinheit gemessen, sich gerade in ganzen Zahlen ausdrücken läßt. Es sei z. B. die Grundlinie eines länglichen Rechtecks (Fig. 66) gleich 3 Centimetern, die Höhe 5^{cm}, so ist klar, daß man auf der Grundlinie drei Quadrate nebeneinander stellen kann, deren jedes ein Centimeter breit und ein Centimeter hoch ist. Solcher Reihen von drei Quadratcentimetern muß man aber fünf auf einander setzen, bis man das ganze längliche Rechteck mit Quadratcentimetern ausgefüllt hat; das längliche Rechteck, Fig. 66, enthält also 3 × 5 oder 15 Quadratcentimeter. Wäre die Grundlinie 4, die Höhe 9 Zoll, so wäre der Inhalt 4 × 9 = 36 Quadratzoll. *Man findet also den Inhalt eines länglichen Rechtecks, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.*

Wenden wir dies auf die Inhaltsberechnung von Quadraten an, so finden wir, in welchem Verhältniß die verschiedenen Flächenmaaß-Einheiten eines Maaß-Systems stehen. Ist die Seite eines Quadrats

2 3 4 5 6 10,

so ist der Inhalt des Quadrats

4 9 16 25 36 . . . . . . 100.

Der Inhalt der Quadrate nimmt also nicht in demselben Verhältnisse zu, wie die Seiten, sondern im Verhältniß der zweiten Potenzen der Seitenlängen.

Dasselbe gilt auch für längliche Rechtecke. Der Inhalt eines länglichen Rechtecks, dessen Grundlinie a, dessen Höhe b ist, ist $a \times b$. Wäre die Grundlinie $2a$, die Höhe $2b$, also doppelt so groß als vorher, so wäre der Inhalt $2a \times 2b = 4ab$, also viermal so groß als der frühere Inhalt. Werden die Seiten eines länglichen Rechtecks sechsmal so groß, so wird sein Inhalt sechs und dreißig mal so groß, als er war; werden die Seiten zehnmal so groß, so wird der Inhalt das Hundertfache u. s. w.

Ist die Seite eines Quadrats $\frac{1}{2}''$, so ist sein Inhalt $\frac{1}{4}\square''$, d. h. vier Quadrate, deren Seite $\frac{1}{2}''$ ist, machen einen Quadratzoll aus. Eben so: wenn die Seite eines Quadrats $\frac{1}{10}''$ ist, so ist sein Inhalt $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}\square''$.

Jede Seite eines Quadratcentimeters (Fig. 67) ist 10 Millimeter lang, der Inhalt dieses Quadrates also 10×10 oder 100 □ Millimeter; ebenso kann man sich leicht überzeugen, daß ein Quadratdecimeter 100 Quadratcentimeter enthält u. s. w.

Fig. 67.

$$1\,\square^{cm} = 100\,\square^{mm}$$
$$1\,\square^{dm} = 100\,\square^{cm} = 10000\,\square^{mm}$$
$$1\,\square^{m} = 100\,\square^{dm} = 10000\,\square^{cm} = 1000000\,\square^{mm}$$

also auch

$$1\,\square^{mm} = 0{,}01\,\square^{cm} = 0{,}0001\,\square^{dm} = 0{,}000001\,\square^{m}$$
$$1\,\square^{cm} = 0{,}01\,\square^{dm} = 0{,}0001\,\square^{m}$$
$$1\,\square^{dm} = 0{,}01\,\square^{m}$$

Es sind demnach auch

$$327{,}835786\,\square^{m} = 327\,\square^{m}\quad 83\,\square^{dm}\quad 57\,\square^{cm}\quad 86\,\square^{mm}$$
$$58273916\,\square^{mm} = 58\,\square^{m}\quad 27\,\square^{dm}\quad 39\,\square^{cm}\quad 16\,\square^{mm}$$

Durch ähnliche Beispiele müssen diese Reductionen gehörig geläufig gemacht werden. Auf ähnliche Weise vergleiche man die Flächenmaaß-Einheiten, welche den Längeneinheiten des zehntheiligen Fußmaaßes ent-

sprechen, und diese alsdann wieder mit den Flächenmaaß-Einheiten des Metermaaßes.

Wie viel Quadratcentimeter hat ein badischer (schweizerischer) Quadratzoll, wie viel Quadratdecimeter enthält ein badischer Quadratfuß u. s. w.?

Bei den älteren Fußmaaßen ist die Duodecimaltheilung durchgeführt; es ist also 1 Fuß gleich 12 Zoll, 1 Zoll gleich 12 Linien u. s. w. Demnach ist auch für das Duodecimalmaaß

$1\square' = 12 \times 12 = 144\square'' = 144 \,.\, 12 = 1728\square'''$

$1\square'' = 144\square'''$.

Fig. 68.

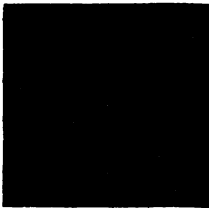


Fig. 68 stellt einen in 144 Quadratlinien getheilten Quadratzoll (altfranzösisches Maaß) dar.

Der Flächeninhalt länglicher Rechtecke. 31

Wenn man den Inhalt eines länglichen Rechtecks berechnen will, so muß man erst die Grundlinie und die Höhe in einer und derselben Einheit ausdrücken. Es sei z. B. die Grundlinie $2^{dm}\,3^{cm}\,4^{mm}$, die Höhe $3^{dm}\,7^{cm}\,2^{mm}$; will man Grundlinie und Höhe ganz in Millimetern ausdrücken und dann multipliciren, so erhält man den Inhalt in Quadratmillimetern ausgedrückt. Die Grundlinie ist 234^{mm}, die Höhe 372^{mm}, also der Inhalt $234 \times 372 = 87048\square^{mm}$. In Centimetern ausgedrückt, ist die Grundlinie $23{,}4^{cm}$, die Höhe $37{,}2^{cm}$, also der Inhalt $23{,}4 \times 37{,}2 = 870{,}48\square^{cm}$. In Decimetern ausgedrückt, ist die Grundlinie $2{,}34^{dm}$, die Höhe $3{,}72^{dm}$, also der Inhalt $2{,}34 \times 3{,}72 = 8{,}7048\square^{dm}$. Diese drei Resultate stimmen aber vollkommen überein, denn es ist $8{,}7048\square^{dm} = 870{,}48\square^{cm} = 87048\square^{mm}$.

Wie groß ist der Inhalt folgender länglichen Rechtecke, deren Grundlinie mit g, und deren Höhe mit h bezeichnet ist?

	g	h
1.	$3^{cm}\ 9^{mm}$	$1^{cm}\ 7^{mm}$
2.	$5^{dm}\ 2^{mm}$	$8^{dm}\ 7^{mm}$
3.	$1^{m}\ 3^{dm}\ 5{,}2^{cm}$	$2^{m}\ 5^{dm}\ 3{,}18^{cm}$

Wie groß ist der Inhalt dieser länglichen Rechtecke in badischem Fußmaaß ausgedrückt?

Für Duodecimalmaaße ist die Reduction auf eine und dieselbe Längeneinheit etwas umständlicher, indem man, um auf die nächst höhere oder die nächst tiefere Längeneinheit zu reduciren, mit 12 multipliciren oder dividiren muß. Es sei z. B. für ein längliches Rechteck $g = 3'' 2'''$, $h = 5'' 9'''$, so kann man die Längen entweder ganz in Zollen oder ganz in Linien ausdrücken. Im ersteren Falle erhält man $g = 3 + {}^2/_{12} = 3{,}166''$ und $h = 5 + {}^9/_{12} = 5{,}75''$, mithin $J = 18{,}2045 \square''$.

Wie groß ist der Inhalt der folgenden länglichen Rechtecke, deren Seiten in preußischem Maaß ausgedrückt sind?

	g	h
1.	5″ 7‴	12″ 3‴
2.	7″ 5‴	3′ 6″ 2‴
3.	2′ 8″ 1‴	6′ 3″ 4‴

Jedes Product zweier Größen, wie $a \times b$, stellt den Inhalt eines länglichen Rechtecks dar, dessen eine Seite a, dessen andere b ist. Ebenso stellt a^2 den Inhalt eines aus der Seite a construirten Quadrates dar.

Wenn der Inhalt und die Höhe eines länglichen Rechteckes gegeben sind, so findet man die Grundlinie, wenn man mit der Höhe in den Inhalt dividirt. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Höhe durch die Längeneinheit ausgedrückt sein muß, welche der Flächeneinheit entspricht, in welcher der Inhalt ausgedrückt ist. Ist z. B. der Inhalt in Quadratzollen ausgedrückt, so muß auch die Höhe in Zollen ausgedrückt sein; der gefundene Quotient ist dann die in derselben Einheit ausgedrückte Grundlinie.

Ebenso findet man die Höhe, wenn man mit der Grundlinie in den Inhalt dividirt.

Wie groß ist die Höhe folgender Rechtecke, deren Inhalt J, und deren Grundlinie g gegeben ist?

g	J
$2^{cm}\ 3^{mm}$	$9\,\square^{cm}\ 20\,\square^{mm}$
$3^{cm}\ 5^{mm}$	$5\,\square^{cm}\ 95\,\square^{mm}$
$1{,}9\,\square^{cm}$	$6\,\square^{cm}$

Wie groß ist die Grundlinie folgender Rechtecke, deren Inhalt J, und deren Höhe h in preußischem Maaß ausgedrückt ist?

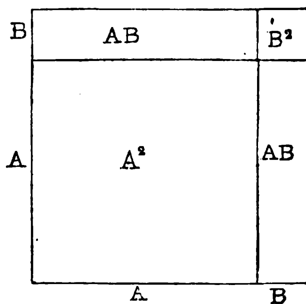
h	J
3″ 11‴	12 □″ 7 □‴
1′ 9″	3 □′ 5 □″
8′ 7″ 6‴	32 □′ 94 □″ 135 □‴

Ist die Seite eines Quadrates gleich der Summe zweier Linien A und B, so ist sein Inhalt

$$(A+B)\times(A+B)=(A+B)^2=A^2+2\,.\,A\,.\,B+B^2;$$

das ganze Quadrat besteht aus dem Quadrate der Linie A, dem Quadrate der Linie B und zwei länglichen Rechtecken, deren Seiten A und B sind, wie dies Fig. 69 erläutert, in welcher $A = 30^{mm}$, $B = 7^{mm}$ ist. Das Quadrat von 37 besteht in der That aus den Quadraten von 30, dem doppelten Producte von 30 und 7 und dem Quadrate von 7 (900 + 2.210 + 49).

Fig. 69.

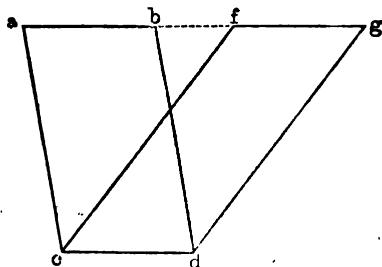


Hier muß noch ganz besonders die Uebereinstimmung der geometrischen Construction mit der Bildung der Quadrate zweitheiliger Wurzeln hervorgehoben werden.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleichen Flächeninhalt. 35

Beweis. Es seien $abcd$ und $cdgf$ (Fig. 70) zwei Parallelogramme, welche die gemeinschaftliche Grundlinie cd haben; daß beide gleiche Höhe haben, erkennt man daran, daß die Seiten ab und gf, welche der Grundlinie gegenüberliegen, in einer mit cd parallelen Linie liegen. Zieht man bf, so entsteht eine vierseitige Figur $acdg$. Nimmt man von dieser das Dreieck acf weg, so bleibt das Parallelogramm $cdgf$ übrig; nimmt man aber von $acdg$ das Dreieck bdg weg, so bleibt das Parallelogramm $abcd$ übrig. Nun ist aber das Dreieck acf gleich dem Dreieck bdg, denn

Fig. 70.



$$\left.\begin{array}{l} ac = bd \\ cf = dg \end{array}\right\} \text{§. 23.}$$

$$\underline{\measuredangle acf = \measuredangle bdg \text{ §. 8.}}$$

$$\triangle acf = \triangle bdg \text{ (II.).}$$

Mag man also das Dreieck acf oder das Dreieck bdg von $acdg$ wegnehmen, so muß doch gleich viel übrig bleiben, folglich

$$abcd = cdgf.$$

Da nun alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe gleich groß sind, so haben sie auch denselben Flächeninhalt wie ein längliches Rechteck, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Man findet demnach den Inhalt eines Parallelogramms, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Bezeichnen wir mit g die Grundlinie, mit h die Höhe und mit J den Flächeninhalt eines Parallelogramms, so ist demnach

$$J = gh.$$

Zur Uebung berechne man den Inhalt mehrerer der oben construirten Parallelogramme.

36 **Flächeninhalt der Dreiecke.** Wie oben §. 24 gezeigt wurde, ist jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Man berechnet also den Flächeninhalt eines Dreiecks nach der Formel

$$J = \frac{gh}{2},$$

oder in Worten: man findet den Inhalt eines Dreiecks, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt und das ge-

fundene Product durch 2 dividirt, oder was dasselbe ist, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multiplicirt.

Man berechne den Inhalt mehrerer der oben construirten Dreiecke.

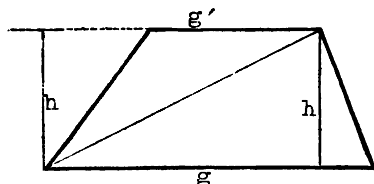
Dividirt man mit der halben Grundlinie in den Inhalt, so erhält man die Höhe des Dreiecks; dividirt man mit der halben Höhe in den Inhalt, so erhält man die Grundlinie.

Flächeninhalt der Vielecke. Jedes Vieleck, es mag eine Form 37
haben, welche man will, läßt sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen. Berechnet man nun den Inhalt eines jeden dieser Dreiecke für sich, so findet man den Inhalt des Vielecks, wenn man die Inhalte der einzelnen Dreiecke addirt.

Zur Uebung zeichne man mehrere ganz beliebige Vielecke und bestimme ihren Inhalt.

Wenden wir dies Verfahren auf ein Paralleltrapez an: die eine der beiden parallelen Seiten (Fig. 71) sei g, die andere g', ihre Entfernung von einander h. Zieht man eine Diagonale, so entstehen zwei Dreiecke; g ist die Grundlinie des einen, h seine Höhe; die Grundlinie des andern ist g', seine Höhe ebenfalls h. Der Inhalt des ersten Dreiecks ist demnach $\frac{gh}{2}$, der Inhalt des andern $\frac{g'h}{2}$, folglich der Inhalt der ganzen Figur $\frac{gh}{2} + \frac{g'h}{2} = h.\frac{g+g'}{2}$. Man findet also den Inhalt eines Paralleltrapezes, wenn man die Länge der beiden parallelen Seiten addirt, von dieser Summe die Hälfte nimmt, und dann mit der Höhe multiplicirt.

Fig. 71.



Flächeninhalt regelmässiger Vielecke. Der Flächeninhalt 38
regelmäßiger Vielecke läßt sich noch auf eine einfachere, als die eben angegebene Weise bestimmen, denn wenn man von dem Mittelpunkte Radien nach den Eckpunkten zieht, so wird das Vieleck in eben so viel gleiche Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat. Ist also nur einmal der Inhalt eines solchen Dreiecks bestimmt, so findet man durch eine Multiplication den Inhalt des ganzen Vielecks. Es sei n die An-

zahl der Seiten des Vielecks, s eine Vielecksseite, h ein vom Mittelpunkte auf die Vielecksseite gefälltes Perpendikel, so ist $\frac{s.h}{2}$ der Inhalt eines Theildreiecks und mithin $\frac{n.s.h}{2}$ der Inhalt der ganzen Figur; $n.s$ ist aber der Umfang der Figur; bezeichnen wir denselben mit u, so ist also der Inhalt der Figur $\frac{u.h}{2}$, d. h. man findet den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks, wenn man den Umfang mit dem aus dem Mittelpunkte auf eine Vielecksseite gefällten Perpendikel multiplicirt und das Product durch 2 dividirt; oder auch, wenn man den halben Umfang mit diesem Perpendikel, oder das halbe Perpendikel mit dem Umfange multiplicirt.

Siebentes Kapitel.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

---

39 **Bedingungen der Aehnlichkeit.** In §. 9 ist gezeigt worden, daß es fünf Fälle giebt, in denen ein Dreieck durch drei Stücke bestimmt ist, unter denen sich aber wenigstens eine Seite befinden muß. Auch kann man die Gleichheit zweier Dreiecke nur dann beweisen, wenn man außer der Gleichheit der entsprechenden Winkel nachweisen kann, daß eine Seite des einen der entsprechenden Seite des anderen gleich ist. Durch die drei Winkel ist ein Dreieck noch nicht bestimmt, es können demnach in zwei Dreiecken die entsprechenden Winkel gleich sein, ohne daß es deshalb auch die entsprechenden Seiten sind. Zwei Dreiecke nun, in welchen die entsprechenden Winkel gleich, aber die entsprechenden Seiten nicht gleich sind, sind einander ähnlich. Um also die Aehnlichkeit zweier Dreiecke nachzuweisen, hat man nur die Gleichheit der entsprechenden Winkel zu zeigen. Die beiden Dreiecke Fig. 72 und Fig. 73 sind ähnlich, weil jeder Winkel des einen dem gleich bezeichneten Winkel des anderen Dreiecks gleich ist.

Bekanntlich ist der dritte Winkel eines Dreiecks durch die Größe der beiden anderen bestimmt, indem die drei Winkel zusammengenommen

Fig. 72.

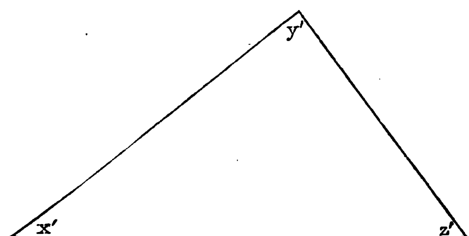


Fig. 73.



zwei Rechte betragen müssen. Kann man also nur nachweisen, daß zwei Winkel eines Dreiecks den beiden entsprechenden Winkeln eines anderen gleich sind, so reicht dies schon hin, die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke zu beweisen, denn alsdann ist auch der dritte Winkel in beiden gleich. Hätte man z. B. zwei Dreiecke, deren jedes einen Winkel von 50° und einen von 100° enthält, so sind sie ähnlich, denn in diesem Falle sind alle Winkel des einen den entsprechenden Winkeln des anderen gleich; der dritte Winkel muß in jedem der beiden Dreiecke 30° sein.

Zur Uebung construire man folgende sechs Dreiecke, und bestimme alsdann, welche derselben einander ähnlich sind.

a	B	C	a	B	C
3″	90°	40°	2″ 4‴	60°	50°
2″ 7‴	115°	40°	8‴	60°	50°
1″	90°	40°	7‴	115°	40°

Proportionalität der Seiten. Wenn die beiden Dreiecke (Fig. 74 40
und Fig. 75 a. f. S.), deren Seiten mit a, b und c; a, b und c bezeichnet sind, ähnlich sind; wenn ferner die Seite a der fünfte Theil der Seite a ist, so muß auch b $= \frac{1}{5} b$ und c $= \frac{1}{5} c$ sein. Um diese Behauptung zu beweisen, trage man die Seite a fünfmal auf a auf, so daß $de = ef = fg = gh = hi =$ a, was jedenfalls möglich ist, da der Voraussetzung nach a $= \frac{1}{5} a$ sein soll. Durch jeden der Punkte e, f, g und h ziehe man eine Linie parallel mit c. Diese vier Linien schneiden die Linie b in den Punkten k, l, n und p. Zieht man nun ferner durch die Punkte k, l, n und p die Linien

km, lo, nq und *pr* mit *a* parallel, so entstehen die Dreiecke *dke, klm, lon, nqp* und *prs*, welche sowohl unter sich, als auch dem Dreieck

Fig. 74.

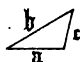


Fig. 75.

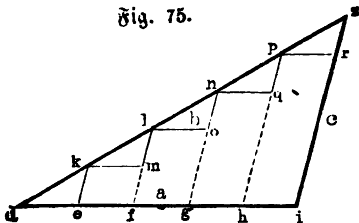


Fig. 74 gleich sind (warum? wird der Leser wohl ohne Schwierigkeit nachweisen können).

Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt aber nun, daß $dk = kl = ln = np = ps$, daß also wirklich $b = \frac{1}{5} b$. Ferner folgt aus der Gleichheit dieser Dreiecke, daß $ke = lm = no = pq = sr = c$ ist. Da nun ferner auch $mf = ke = c$, so ist $lf = 2c$, folglich ist auch $og = 2c$ und $ng = 3c$, und so weiter schließend, ergiebt sich endlich auch, daß *si* oder $c = 5c$, wie oben behauptet wurde.

Wäre a $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots \frac{1}{n}$ von *a* gewesen, so würde auch b $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots \frac{1}{n}$ von *b*, und c der 3te, 4te, 6te ... *n*te Theil von *c* gewesen sein, was sich ganz auf die eben durchgeführte Art beweisen läßt.

Dieser Satz läßt sich in Worten ganz allgemein so ausdrücken: **Wenn zwei Dreiecke einander ähnlich sind, und die eine Seite des kleineren ist irgend ein aliquoter Theil der entsprechenden Seite des größeren Dreiecks, so betragen auch die anderen Seiten des kleineren Dreiecks den eben so vielsten Theil der entsprechenden Seiten des großen.**

Die beiden Dreiecke *lmn* (Fig. 77) und *opq* (Fig. 78) seien

Fig. 77.

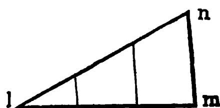
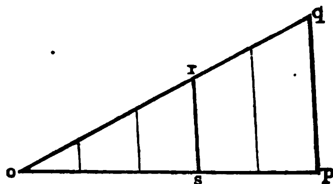


Fig. 78.



ähnlich. Wenn sich nun die Grundlinie lm zu op verhält wie $3:5$, so ist auch

$$ln : oq = 3 : 5$$

und

$$mn : pq = 3 : 5.$$

Um dies zu beweisen, theile man die Grundlinie op in fünf gleiche Theile, so ist $os = {}^{3}/_{5}\, op$, also $os = lm$. Durch jeden der Theilpunkte auf op ziehe man eine Linie parallel mit pq; diese Linien theilen oq in fünf gleiche Theile, und da or drei dieser Theile beträgt, so verhält sich $or : oq = 3 : 5$. Ebenso leicht ist auch zu zeigen, daß $rs : pq = 3 : 5$, indem, wie aus den vorigen Nummern folgt, rs dreimal und pq fünfmal so groß ist, als die Linie, welche durch den nach o zuerst folgenden Theilpunkt der Grundlinie mit pq parallel gezogen ist. Alle Seiten des Dreiecks ors verhalten sich also zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks opq wie $3 : 5$; da aber, wie leicht zu beweisen ist, das Dreieck $lmn = \triangle\, ors$, so stehen also auch alle Seiten des Dreiecks lmn zu den entsprechenden des Dreiecks opq in dem Verhältniß von $3:5$.

Man construire zwei ähnliche Dreiecke, deren Grundlinien sich verhalten wie $4 : 7$, und beweise auf die eben durchgeführte Weise, daß auch die anderen einander entsprechenden Seiten beider Dreiecke in demselben Verhältniß stehen.

Auf die angeführte Art läßt sich immer beweisen, daß wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, *alle Seiten des einen in demselben Verhältnisse zu den entsprechenden Seiten des anderen stehen.* Bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die drei Seiten des einen, mit a, b und c die drei Seiten des anderen, und zwar so, daß gleiche Buchstaben entsprechenden Seiten angehören, so ist demnach

$$a : \mathfrak{a} = b : \mathfrak{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a : \mathfrak{a} = c : \mathfrak{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus der Lehre von den Proportionen ist bekannt, daß man die mittleren Glieder einer geometrischen Proportion mit einander vertauschen kann, ohne daß dadurch die Richtigkeit der Proportion gestört wird. Aus den beiden Proportionen 1 und 2 zieht man durch diese Vertauschung

$$a : b = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

$$a : c = \mathfrak{a} : \mathfrak{c}.$$

Wenn also zwei Dreiecke ähnlich sind, so stehen je zwei Seiten des

einen unter einander in demselben Verhältniß, in welchem die den beiden entsprechenden Seiten des anderen zu einander stehen.

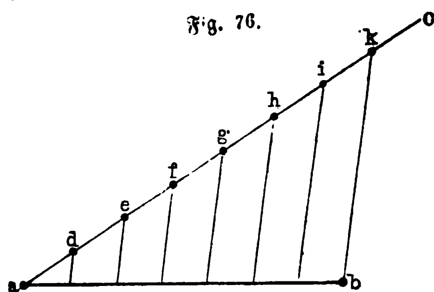
So zieht man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Fig. 77 und Fig. 78 zunächst die Proportionen

$$lm : op = ln : oq$$
$$lm : op = mn : pq$$
$$ln : oq = mn : pq$$

und durch die Vertauschung der mittleren Glieder

$$lm : ln = op : oq$$
$$lm : mn = op : pq$$
$$ln : mn = oq : pq.$$

41 **Aufgabe.** Eine gegebene gerade Linie in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

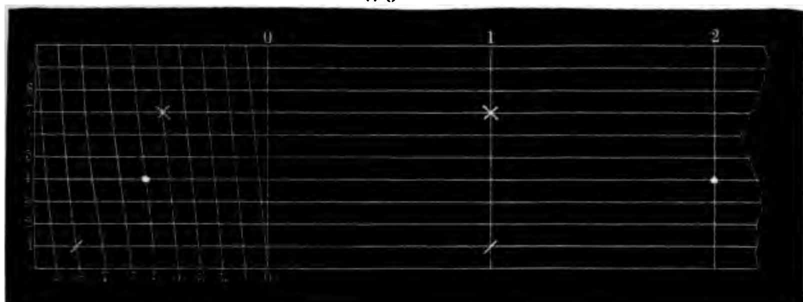


Auflösung. Die Linie ab (Fig. 76) sei in sieben gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch den einen Endpunkt a der gegebenen Linie eine Linie ac in beliebiger Richtung und von unbestimmter Länge, trage alsdann von a an siebenmal eine beliebige Länge ad auf, so daß $ad = de = ef = fg$ u. s. w. Zieht man nun von k nach b und mit kb parallel Linien durch die Punkte d, e, f, g, h und i, so theilen diese die Linie ab in sieben gleiche Theile. Der Beweis ergiebt sich leicht aus dem vorigen Paragraphen.

42 **Der tausendtheilige Maassstab.** Auf die in den letzten Paragraphen besprochenen Sätze gründet sich die Construction des sogenannten tausendtheiligen Maaßstabes, welcher gestattet, Längen bis auf Unterabtheilungen (etwa $^1/_{10}$ Linien) genau zu messen, welche zu klein sind, als daß man sie unmittelbar auf eine gerade Linie auftragen könnte. Fig. 79 stellt ein Stück eines solchen Maaßstabes (badische Zolle und Linien) dar. Der Maaßstab besteht nicht aus einer einzigen getheilten Linie, sondern er wird durch 11 um eine Linie von einander abstehende Horizontallinien gebildet. Die ganzen Zolle sind von der oben und unten mit 0 bezeichneten Verticallinie nach rechts gezählt (und zwar enthält unsere Figur deren nur noch zwei, während in der Regel der Maaßstab von 0 an

noch 10 Zoll mißt), die Linien aber nach der Linken. Der letzte Zoll von 0 an links ist nämlich auf der obersten und auf der untersten Ho-

Fig. 79.



rizontallinie in 10 gleiche Theile getheilt, alsdann aber ist von dem Theilpunkte 1 auf der obersten horizontalen eine schräge Linie nach 0 auf der untersten gezogen und mit dieser parallel dann weiter

von 2 oben nach 1 unten
» 3 » » 2 »
» 4 » » 3 »
» 5 » » 4 »

Fig. 80.



u. s. w. Auf diese Weise entstehen auf beiden Seiten des in Linien getheilten Zolles kleine spitze Dreiecke von 1″ Höhe und 1‴ Basis, von denen das rechter Hand Fig. 80 für sich allein gezeichnet ist. Dieses Dreieck wird nun von den horizontalen Linien durchschnitten, von denen wir die allerunterste mit 0, die nächste mit 1, die folgende mit 2 u. s. w., die oberste endlich mit 10 bezeichnen wollen. Diejenige Länge dieser horizontalen, welche zwischen die verticale *bc* (00 in Fig. 79) einerseits und die schräge *ac* andererseits fällt, ist nun

für die Horizontallinie 1 gleich 0,1‴
» » » 2 » 0,2‴
» » » 3 » 0,3‴
» » » 4 » 0,4‴

u. s. w.; man kann also auf diesem Maaßstab bis auf 1/10 Linie genau messen, nur muß man die Messung auf der entsprechenden Horizontallinie vornehmen und zwar auf der Horizontallinie 1, 2, 3 ... 9, wenn 1/10, 2/10, 3/10 ... 9/10 Linie abzumessen ist.

Es sei z. B. die Länge 1″ 4,7‴ abzumessen, so hat man in Fig. 79

auf der Horizontallinie 7 die Länge zu nehmen zwischen der oben mit 1 bezeichneten Verticallinie und der unten mit 4 bezeichneten schrägen. Die Endpunkte dieser Länge sind in unserer Figur mit × bezeichnet. Der Abstand der beiden in unserer Figur mit . bezeichneten Punkte ist 2″ 5,4‴. Die Länge 1″ 8,1‴ ist auf der Horizontallinie 1 in der Weise abzugreifen, wie es durch einen kleinen Querstrich / bezeichnet ist.

Zur Uebung greife man mit dem Zirkel auf obigem Maaßstab ab:

0,7‴	1″ 3,9‴
5,3‴	1″ 9,2‴
8,8‴	2″ 1,6‴

43 **Der Nonius.** Eine andere Vorrichtung, welche dazu dient, Längen bis auf kleine Unterabtheilungen genau zu messen, ist der Nonius (nach seinem Erfinder so genannt), dessen Wesen darin besteht, daß längs der Haupttheilung ein kleineres getheiltes Plättchen, der Nonius, verschiebbar ist, dessen Theilung zu der Haupttheilung in solcher Beziehung steht, daß die Länge von n Theilen der Haupttheilung auf dem verschiebbaren Täfelchen in $n + 1$ oder $n - 1$ Theile getheilt ist.

Wir wollen dies an einem speciellen Beispiel erläutern. In Fig. 81 sei AB die in Pariser Linien getheilte Haupttheilung; CD ist der Nonius, welcher hier gerade so gestellt ist, daß der Theilstrich 0 des Nonius mit dem Theilstrich 12 der Haupttheilung, der Theilstrich 10 des Nonius aber mit dem Theilstrich 21 der Haupttheilung zusammenfällt.

Fig. 81.



Man übersieht bei dieser Stellung leicht, daß die Länge von 9‴ der Haupttheilung auf dem Nonius in 10 gleiche Theile getheilt ist, es sind also

$$10 \text{ Noniustheile } . = 9'''$$
$$1 \text{ Noniustheil } . = {}^{9}/_{10}'''$$

1 Noniustheil ist also um $^{1}/_{10}$ Linie kleiner als 1‴.

Wenn also irgend ein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstrich der Haupttheilung zusammenfällt, so wird von diesem an gerechnet der 1ste, 2te, 3te u. s. w. Theilstrich des Nonius vom 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Theilstrich der Haupttheilung um $^{1}/_{10}$, $^{2}/_{10}$, $^{3}/_{10}$ u. s. w. Linie abstehen.

So ist z. B. in Fig. 81 der Abstand des

Theilstrichs	1	des	Nonius	vom	Theilstrich	13	der	Haupttheilung	= 0,1‴
»	2	»	»	»	»	14	»	»	= 0,2‴
»	3	»	»	»	»	15	»	»	= 0,3‴
»	4	»	»	»	»	16	»	»	= 0,4‴
»	5	»	»	»	»	17	»	»	= 0,5‴
»	6	»	»	»	»	18	»	»	= 0,6‴

u. s. w.

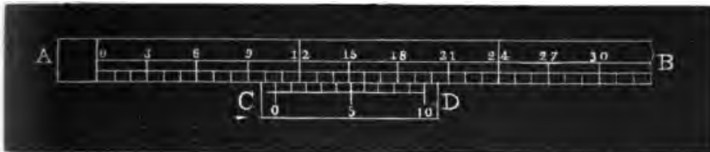
Wird nun der Nonius längs der Haupttheilung verschoben, so kann man für jede Stellung des Nonius bis auf $^1/_{10}$ Linie genau angeben, wie weit die durch den Nullpunkt des Nonius bezeichnete Stelle vom Nullpunkte der Haupttheilung absteht.

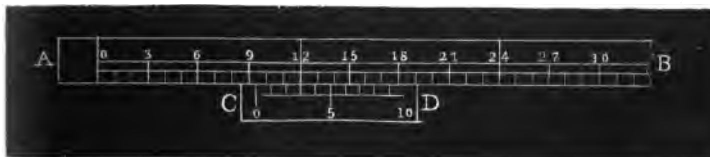
In Fig. 82 z. B. steht der Nullpunkt des Nonius zwischen den Theilstrichen 10 und 11 der Haupttheilung. Geht man aber vom Nullpunkte des Nonius nach der Rechten, so findet man, daß der Theilstrich 6 des Nonius mit einem Theilstrich (und zwar dem Theilstrich 16) der Haupttheilung zusammenfällt. Es ist also der Abstand des

Theilstrichs	5	des	Nonius	vom	Theilstrich	15	der	Haupttheilung	= 0,1‴
»	4	»	»	»	»	14	»	»	= 0,2‴
»	3	»	»	»	»	13	»	»	= 0,3‴
»	2	»	»	»	»	12	»	»	= 0,4‴
»	1	»	»	»	»	11	»	»	= 0,5‴
»	0	»	»	»	»	10	»	»	= 0,6‴

Die in Fig. 82 durch den Nullpunkt des Nonius bezeichnete Stelle ist also 10,6‴ vom Nullpunkte des Nonius entfernt.

Fig 82.





Bei der Stellung, welche der Nonius in Fig. 83 gerade einnimmt,

ist der Abstand vom Nullpunkte der Haupttheilung bis zum Nullpunkte des Nonius gleich 9,3 Linien.

Wie groß ist der Abstand der beiden Nullpunkte bei der in Fig. 84 verzeichneten Stelle des Nonius?

Fig. 84.

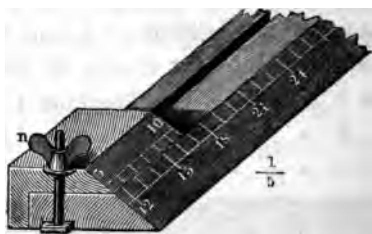


Um beim Unterricht die Ablesung des Nonius einzuüben, ist das Modell einer solchen Vorrichtung in großem Maaßstabe zu empfehlen, bei welcher etwa die Haupttheilung in Zollen ausgeführt und auf dem

Fig. 85.



Fig. 86.



Nonius die Länge von 9 Zollen in 10 gleiche Theile getheilt ist, so daß man Zehntel-Zoll damit ablesen kann. Fig. 85 stellt ein solches in Holz ausgeführtes Modell in $^{1}/_{10}$ der natürlichen Größe dar. Der Nonius ist auf einem Schieber aufgetragen, welcher längs der Schiene hin und her geschoben werden kann, auf welcher die Haupttheilung angebracht ist. Schieber und Schiene hängen mittelst eines in einem Schlitz der Schiene verschiebbaren Stiftes zusammen, und es kann der Schieber mittelst der Schraubenmutter *n* an jeder beliebigen Stelle der Haupttheilung festgestellt werden. Die Art und Weise, wie beide Theile zusammenhängen, ist aus Fig. 86 ersichtlich.

Der Nonius wird bei Kreistheilungen noch häufiger angewandt als bei Längentheilungen. Nehmen wir an, auf der Haupttheilung sei der

Grad noch in drei Theile getheilt, so ist der Bogen zwischen je zwei Theilstrichen der Haupttheilung gleich $^1/_3$ Grad = 20 Minuten. Wenn nun der Bogen von 19 Theilstrichen der Haupttheilung auf dem Nonius in 20 gleiche Theile getheilt ist, so ist der Bogen zwischen zwei aufeinander folgenden Theilstrichen des Nonius $^1/_{20}$ von einer Abtheilung der Haupttheilung, also der 20ste Theil von 20 Minuten; man kann also bei dieser Einrichtung mit Hülfe des Nonius bis auf 1 Minute genau ablesen. Das Verhältniß zwischen Nonius und Haupttheilung ist für verschiedene Instrumente nicht dasselbe.

Aehnliche Vielecke. Zwei Vielecke *abcde* und *ABCDE* (Fig. 87 44
und Fig. 88) sind ähnlich, wenn alle Dreiecke ähnlich sind, in welche sie durch

Fig. 87.

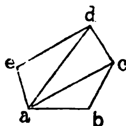
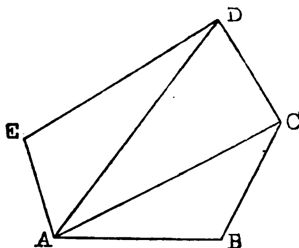


Fig. 88.



entsprechend liegende Diagonalen getheilt werden. Sollen die Fünfecke in Fig. 87 und Fig. 88 ähnlich sein, so muß das Dreieck *abc* dem Dreieck *ABC*, ferner *acd* dem Dreieck *ACD*, und endlich *ade* dem Dreieck *ADE* ähnlich sein. In diesem Falle aber hat man

$$ac : AC = dc : DC$$
$$ac : AC = cb : CB$$
$$ac : AC = ab : AB$$

woraus folgt

$$dc : DC = cb : CB = ab : AB$$

ebenso läßt sich auch zeigen, daß die Seiten *de* und *ea* zu den Seiten *DE* und *EA* in demselben Verhältnisse stehen.

Wenn also zwei Vielecke einander ähnlich sind, so sind die entsprechenden Seiten proportional, d. h. alle Seiten des einen Vielecks stehen in gleichem Verhältniß zu den entsprechenden Seiten

des anderen. Ist z. B. eine Seite des kleineren $^1/_9$ der entsprechenden Seite im großen, so stehen alle Seiten des kleinen zu den entsprechenden Seiten des großen in dem Verhältniß von 1 : 9. Steht eine Seite des kleinen zu der entsprechenden im großen in dem Verhältniß von 2 : 7, so sind alle Seiten des kleinen $^2/_7$ der entsprechenden Seiten des anderen Vielecks. Daraus folgt nun auch, daß je zwei Seiten des kleinen unter sich in demselben Verhältniß stehen, wie die beiden entsprechenden Seiten des großen Vielecks.

45 **Berechnung der Dreiecksseiten.** Die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke liefert ein Mittel, zwei Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn man nur eine Seite desselben und die drei Seiten eines ähnlichen kennt. Es sei z. B. in einem Dreieck die eine Seite a = 1000′, die Seiten b und c unbekannt. Die Seiten eines anderen Dreiecks, welches diesem ähnlich ist, seien mit a, b und c bezeichnet, und zwar so, daß die entsprechenden Seiten beider Dreiecke mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind. Es sei nun $a = 4^{cm}$, $b = 7^{cm}$, $c = 5^{cm}$, so hat man die Proportionen

$$a : b = \mathfrak{a} : \mathfrak{b},$$

oder, wenn man für a, b und a ihre Werthe setzt,

$$4 : 7 = 1000 : \mathfrak{b},$$

woraus sich ergiebt

$$\mathfrak{b} = \frac{7000}{4} = 1750.$$

Ebenso hat man die Proportion

$$a : c = \mathfrak{a} : \mathfrak{c},$$

also

$$4 : 5 = 1000 : \mathfrak{c},$$

woraus sich ergiebt

$$\mathfrak{c} = \frac{5000}{4} = 1250'.$$

Kennt man demnach in einem Dreiecke nur eine Seite und zwei Winkel, so kann man die Länge der beiden anderen Seiten durch Rechnung finden, ohne sie direct zu messen; denn da man zwei Winkel des Dreiecks kennt, so kann man ein ähnliches auf dem Papiere construiren, die Seiten desselben messen, und dann auf die eben angegebene Weise die nöthigen Proportionen ansetzen.

Zur Uebung mögen einige Beispiele dienen. Wie groß sind in folgenden sechs Dreiecken die Seiten b und c?

a	B	C	a	B	C
4524′	60°	30°	748′	53°	68°
548′	115°	42°	93′	122°	31°
12429′	25°	124°	6728′	21°	82°

a bezeichnet hier, wie früher, die Grundlinie eines Dreiecks, während mit B und C die Winkel zur rechten und linken derselben bezeichnet sind.

In der oben angegebenen Weise bedient man sich der Aehnlichkeit der Dreiecke, um Längen zu berechnen, deren directe Messung unmöglich ist, wie dies noch durch die folgenden Aufgaben näher erläutert werden soll.

Aufgabe. Die Höhe eines Thurmes, eines Baumes u. s. w. zu bestimmen, ohne den Gipfel zu ersteigen.

Auflösung. Wir nehmen an, daß der Gegenstand, dessen Höhe bestimmt werden soll, auf einer wagerechten Ebene stehe, und daß man

Fig. 89.

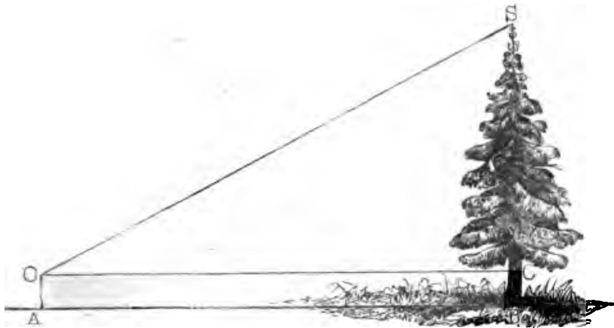
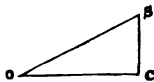


Fig. 90.



die Entfernung irgend eines Punktes A (Fig. 89) in der horizontalen Ebene von dem Punkte B bestimmen könne, der senkrecht unter dem Gipfel S liegt. Diese Entfernung AB sei z. B. 500′. Nun stelle man sich in A auf, und messe den Winkel, den die durch das Auge des Beobachters nach dem Gipfel des Baumes gehende gerade Linie OS mit der durch das Auge gelegten horizontalen Linie OC macht; dieser Winkel sei 15°. Nun kann man leicht auf dem Papiere ein Dreieck ocs, Fig. 90,

construiren, welches dem Dreieck OCS ähnlich ist. Die Grundlinie oc dieses Dreiecks ist vollkommen willkürlich, man mache sie z. B. 3″. Bei c setze man einen rechten Winkel an, bei o einen Winkel von 15°, so wird das Dreieck ocs dem Dreieck OCS ähnlich sein, wir haben also die Proportion

$$oc : cs = OC : CS.$$

Da man die Länge cs auf dem Papiere messen kann, so ist in dieser Proportion nur noch CS unbekannt, und kann also leicht berechnet werden. Zu CS hat man dann noch die Höhe AO hinzuzufügen, um die Höhe des Baums zu erhalten. Man führe die hier angedeutete Zeichnung und Rechnung aus.

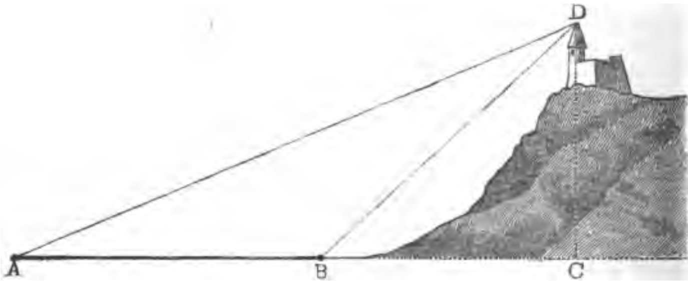
Diese Aufgabe läßt sich auch ohne Winkelmessung durch die Messung der Länge des Schattens lösen. Gesetzt den Fall, der Schatten des Baumes sei 132′ lang; ein Stab von 4′ Höhe werfe gleichzeitig einen Schatten von 7′, so kann man die Höhe des Baumes berechnen, weil sich der Stabschatten zum Baumschatten verhält, wie die Stabhöhe zur Baumhöhe, also

$$7 : 132 = 4 : x.$$

Aufgabe. Die Höhe eines Berges zu berechnen.

Auflösung. Diese Aufgabe läßt sich nicht wie die vorige auflösen, weil man nicht bis zu dem Punkte C (Fig. 91) der horizontalen Ebene

Fig. 91.

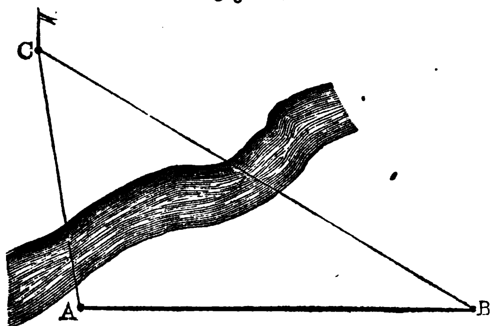


messen kann, der vertical unter dem Gipfelpunkt D des Berges liegt. Um die Aufgabe zu lösen, messe man eine Linie AB (Basis), welche in der horizontalen Ebene liegt, auf welcher sich der Berg erhebt, und welche mit D in einer Verticalebene liegt, so also, daß die Verlän-

gerung von AB durch die Horizontalprojection des Gipfelpunktes D geht, welche wir mit C bezeichnen wollen. Darauf messe man die Winkel, welche die Visirlinien AD und BD mit der horizontalen AC machen. Nachdem diese Winkel gemessen sind, ist es leicht, auf dem Papiere ein Dreieck zu construiren, welches dem Dreieck ABD ähnlich ist; ist dies geschehen, so verlängere man die Grundlinie und fälle vom Gipfel des Dreiecks auf diese Verlängerung ein Perpendikel, so entspricht dieses der Höhe des Berges. Da man nun alle Linien auf dem Papiere messen kann, so ist es leicht, die Höhe durch Proportionen zu berechnen. Gesetzt den Fall, man habe gefunden $AB = 3000'$, $\measuredangle DBC = 18^0$, $\measuredangle DAC = 10^0$, wie hoch ist der Berg?

Aufgabe. Die Entfernung zweier Orte A und C (Fig. 92) zu bestimmen, die man wegen eines zwischen beiden gelegenen Hindernisses

Fig. 92.



(welches jedoch nicht hindert, von A nach C zu visiren), nicht unmittelbar messen kann.

Auflösung. Man messe die Basis AB, von deren anderem Endpunkte B man auch nach C visiren kann; messe alsdann die Winkel CAB und CBA, construire darauf auf dem Papiere ein Dreieck, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist. Da man alle Seiten dieses kleinen Dreiecks messen kann, so ist es nun leicht, mittelst Proportionen sowohl die Länge CA, als auch CB zu berechnen. AB sei $500'$, $\measuredangle$ CAB 80^0, $CBA \measuredangle$ 50^0, wie groß ist CA und CB?

Aufgabe. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 93 a. f. S.)

zu bestimmen, wenn man weder zu dem einen noch zu dem anderer hingehen kann.

Fig. 94.

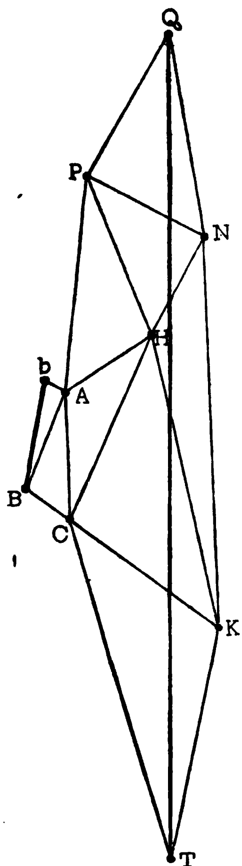
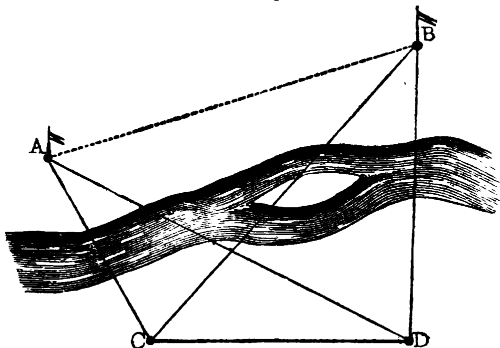


Fig. 93.



Auflösung. Man messe eine Basis CD, von deren Endpunkten aus man nach C und D visiren kann. Man messe alsdann die Winkel CDA, CDB, ACD und BCD, und construire nach diesen Winkeln eine Figur, welche der Figur $BDCA$ ähnlich ist. Hat man die nöthigen Linien dieser construirten Figur gemessen, so kann man leicht BA berechnen.

Bei Vermessung größerer Länderstrecken denkt man sich eine Reihe ausgezeichneter Punkte durch Visirlinien verbunden und so das ganze Land mit einem Dreiecksnetz bedeckt. Wenn man nun von diesem ganzen Dreiecksnetz nur eine einzige Linie (die Basis), außerdem aber die sämmtlichen Winkel der einzelnen Dreiecke gemessen hat, so kann man eine dem großen Dreiecksnetze ähnliche Figur auf dem Papiere entwerfen, in welcher man dann leicht alle Seiten messen und mit Hülfe derselben alsdann die entsprechenden Längen des großen Dreiecksnetzes berechnen kann.

So ist z. B. Fig. 94 das Bild eines von Maupertuis in Lappland gemessenen Dreiecksnetzes. Die Basis bB wurde auf dem Eise eines Flusses gemessen und gleich 7407 Toisen gefunden. An diese Basis

lehnt sich nun eine Reihe von Dreiecken an, in welchen sämmtliche Winkel (hier absichtlich nur auf Minuten genau angegeben), aber keine Seite mehr gemessen wurde. Man fand

im Dreieck	den Winkel
BbA	bei B gleich 9° 30′ » b » 77° 32′
ABC	bei B gleich 102° 42′ » A » 22° 37′
AHC	bei A gleich 112° 21′ » C » 30° 57′
AHP	bei H gleich 94° 54′ » A » 53° 46′
PHN	bei P gleich 37° 22′ » H » 49° 13′
PNQ	bei P gleich 87° 52′ » N » 51° 53′
HCK	bei C gleich 100° 10′ » H » 36° 5′
CKT	bei C gleich 37° 9′ » K » 118° 28′

Diese Data reichen hin, um eine dem wirklichen Dreiecksnetze ähnliche Figur zu zeichnen, in welcher man alle Längen messen und dann die entsprechenden Entfernungen des großen Dreiecksnetzes berechnen kann.

Führt man die Zeichnung in etwas großem Maaßstabe aus (indem man etwa bB gleich 3 oder 4 Centimetern macht; beim Auftragen der Winkel mit dem Transporteur kann man natürlich die einzelnen Minuten nicht genau, sondern nur nach ohngefährer Schätzung auftragen), so wird man für die Länge QT ohngefähr den Werth von 54940 Toisen finden.

46 **Das Theodolit.** In den bisherigen Aufgaben war wiederholt von der Messung des Winkels die Rede, welchen zwei Visirlinien mit einander machen, ohne daß die Art und Weise erklärt worden wäre, wie man eine solche Messung ausführen kann. Unter den verschiedenen zu diesem Zwecke dienenden Instrumenten ist jedenfalls das Theodolit das vollkommenste. Fig. 95 stellt ein Theodolit von möglichster Einfachheit in perspectivischer Ansicht, Fig. 96 stellt es in größerem Maaßstabe im Aufriß, und zwar zum Theil im Durchschnitt dar.

Fig. 95.



Das Theodolit besteht im Wesentlichen aus zwei getheilten Kreisen, von denen der eine vertical, der andere horizontal ist. Der Verticalkreis *A* ist sammt dem Fernrohr *F* an einer horizontalen Axe befestigt, und beide sind um diese Axe drehbar, so daß die gegenseitige Stellung des getheilten Verticalkreises und des Fernrohrs stets ungeändert bleibt.

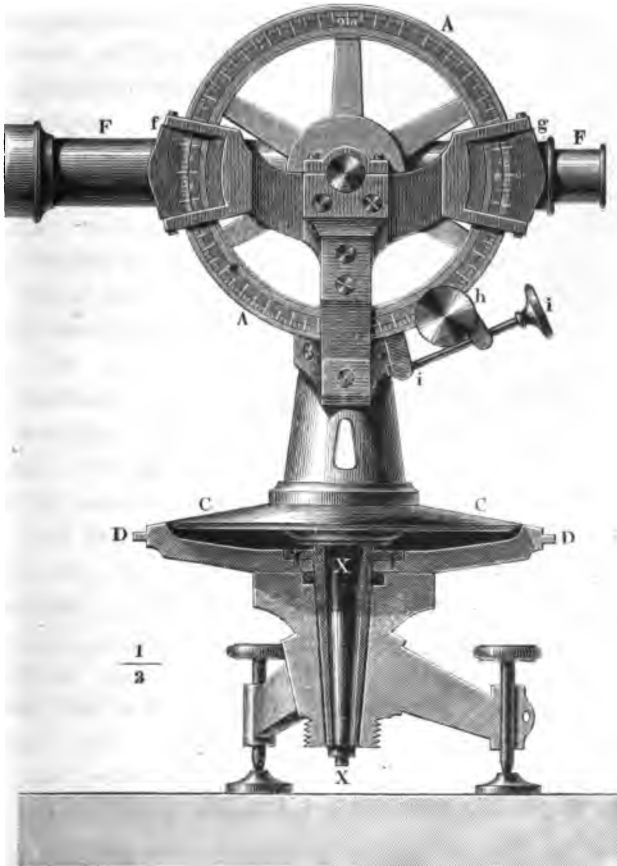
Dieser getheilte Kreis *A* wird der Höhenkreis genannt, weil er dazu dient, Höhenwinkel zu messen.

Zu beiden Seiten des drehbaren Höhenkreises sind feste Nonien *f* und *g* angebracht. Wenn das Instrument gehörig aufgestellt und justirt ist, sollen die Nullpunkte der Nonien *f* und *g* auf die Punkte 0 und 180 der Theilung des Höhenkreises zeigen, sobald die Axe des Fernrohrs vollkommen wagerecht steht; dreht man dann das Fernrohr aus seiner horizontalen Richtung heraus, um es auf einen höher oder tiefer gelegenen Punkt zu richten, so kann man die Größe dieser Drehung, also auch den Winkel, welchen nun die Visirlinie des Fernrohrs mit der horizontalen macht, an den Nonien ablesen.

Das Gestell, welches die horizontale Umdrehungsaxe des Fernrohrs

trägt, ist auf einer horizontalen, um den verticalen Zapfen X drehbaren Scheibe C befestigt, welche der Horizontalkreis, der Alhidaden-

Fig. 96.



kreis oder die Alhidade genannt wird. Dieser Kreis dreht sich genau passend innerhalb eines mit dem Fußgestell des ganzen Apparates fest verbundenen, ringsum mit einer Gradtheilung versehenen kreisförmigen Ringes D, welcher der Limbus genannt wird. Die Alhidade trägt an ihrem äußeren Rande zwei Nonien k, welche sich bei der Drehung der Alhidade längs der Theilung des Limbus hin bewegen, wie man deutlicher in Fig. 97 (a. f. S.) sieht, welche die Alhidade und den Limbus von oben gesehen darstellt, jedoch mit Weglassung der Stellschraube r, mittelst deren man die Alhidade an den Limbus anklemmen, und der

Mikrometerschraube t, mittelst deren man eine feinere Verschiebung der Alhidade bewerkstelligen kann.

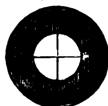
Fig. 97.



Um den Limbus und die Alhidade gehörig wagerecht zu stellen, was man an einer in der Mitte der Alhidade angebrachten Dosenlibelle erkennen kann, dienen drei Fußschrauben (von denen in Fig. 95 und 96 nur zwei sichtbar sind), welche das ganze Instrument tragen.

Bemerken wir noch, daß die Theodolitfernröhre stets astronomische Fernröhre sind (siehe Grundriß der Physik, 6. Auflage, S. 288), daß sie also alle Gegenstände verkehrt zeigen, und daß sie mit einem *Fadenkreuze* versehen sind. An der Stelle nämlich, an welcher das Bild des Objectivs zu Stande kommt, ist eine Blendung angebracht, über deren Oeffnung zwei sehr feine Fäden (in der Regel Spinnenfäden) unter rechtem Winkel sich kreuzend ausgespannt sind (Fig. 98). Will man einen bestimmten Gegenstand, etwa eine Thurmspitze, einvisiren, so richtet man das Fernrohr so, daß das Bild des zu beobachtenden Gegenstandes genau in den Durchschnittspunkt der Fäden fällt. Man sieht, daß auf diese Weise die Visirlinie des Fernrohrs vollkommen genau bestimmt ist.

Fig. 98.



Mit Hülfe des Alhidadenkreises und seines Limbus wird der Winkel gemessen, welchen die Horizontalprojectionen zweier beliebigen Visirlinien mit einander machen. Will man z. B. den Winkel messen, welchen die Horizontalprojectionen der vom Beobachtungsorte nach einem Gegenstande R gerichteten Visirlinie macht mit der Horizontalprojection der nach L gerichteten Visirlinie, so richtet man das Fernrohr zunächst auf den Gegenstand R und liest den Nonius des Horizontalkreises ab; sodann richtet man das Fernrohr nach L und liest den Nonius abermals ab. Die Differenz der beiden Ablesungen ist alsdann der gesuchte Winkel.

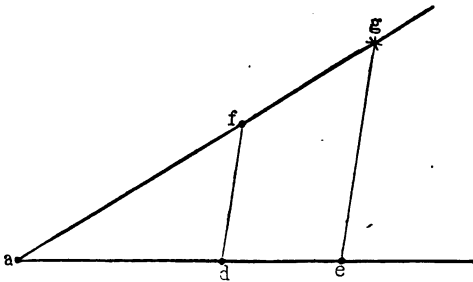
Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien eine vierte Proportionale zu construiren. 47

Auflösung. Die Länge der drei gegebenen Linien sei mit m, n und o bezeichnet, so ist die gesuchte vierte Proportionale eine Linie, deren Länge sich zu o verhält wie n zu m, also eine Linie, deren Länge durch die vierte Proportionale in der Proportion

$$m : n = o . x$$

dargestellt wird. Die Länge dieser Linie kann man durch Rechnung aus dieser Proportion finden, sie ist $\frac{n \times o}{m}$; unsere Aufgabe verlangt aber, daß die Länge dieser Linie construirt, nicht berechnet werde. Diese Aufgabe wird folgendermaßen gelöst. Man ziehe zwei Linien (Fig. 99) von unbestimmter Länge, die einen beliebigen Winkel mit einander machen, mache auf diesen Linien $ad = m$, $ae = n$, $af = o$, ziehe fd und mit fd parallel eg, so ist ag die verlangte vierte Proportionale, denn die Dreiecke afd und age sind ähnlich, und demnach ist

Fig. 99.



$$ad : ae = af : ag.$$

Zur Uebung construire man die vierte Proportionale in folgende Proportionen:

$$2'' : 3'' = 3'' : x$$
$$3'' : 4'' = 5'' : x$$
$$3'' : 2'' = 3{,}9'' : x$$
$$2'' : 1{,}5'' = 3{,}2'' : x$$

Ein jeder Bruch von der Form $\frac{a\ b}{c}$ stellt uns die vierte Proportionale zu den drei Größen c, a und b dar, denn wenn man in der Proportion

$$c : a = b : x$$

den Werth von x berechnet, so findet man ihn $\frac{a . b}{c}$. Man kann demnach den Werth des Bruches $\frac{ab}{c}$ construiren, indem man auf die eben angegebene Weise die vierte Proportionale zu den drei Größen c, a und b con-

struirt. Sollte z. B. $\frac{2 \cdot 3''}{5}$ construirt werden, so hätte man nur die vierte Proportionale in der Proportion

$$5'' : 2'' = 3'' : x$$

zu construiren.

Um $\frac{8''}{5}$ zu construiren, braucht man nur den Zähler in zwei Factoren, z. B. in 2 und 4 zu zerlegen, und alsdann die vierte Proportionale der Proportion

$$5 : 2 = 4 : x$$

zu construiren.

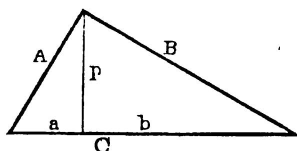
Zur Uebung construire man $\frac{4{,}8''}{3}$ $\frac{7{,}2''}{5}$ $\frac{2{,}8''}{1{,}3}$ $\frac{3{,}6''}{2{,}5}$ u. s. w.

Wenn der Zähler sich nicht auf andere Weise zerlegen läßt, so kann man ihn doch als ein Product von 1 und der Zahl selbst betrachten, und danach die Construction ausführen. Sollte z. B. $\frac{5''}{3}$ construirt werden, so kann man $\frac{1 \cdot 5}{3}$ statt $\frac{5}{3}$ setzen; die verlangte Linie ist demnach die vierte Proportionale in der Proportion

$$3 : 1 = 5 : x.$$

48 **Die mittlere Proportionale.** Fällt man von dem Scheitel des rechten Winkels in einem rechtwinkeligen Dreieck ein Perpendikel auf die Hypotenuse (mit dem Namen der Hypotenuse bezeichnet man diejenige Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, während die beiden anderen Seiten Katheten genannt werden), so wird das Dreieck dadurch in zwei andere getheilt, welche sowohl unter sich, als auch dem ganzen ähnlich sind. In Fig. 100 ist die Hypotenuse mit C bezeichnet, die Katheten mit A und B, das auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel mit p. Dieses Perpendikel theilt die Hypotenuse in zwei Theile a und b. Es ist nun leicht zu zeigen, daß das Theildreieck apA zwei Winkel enthält, welche den entsprechenden Winkeln des Dreiecks ABC gleich sind, woraus dann die Aehnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt. Eben so läßt sich auch die Aehnlichkeit der Dreiecke bBp und ABC nachweisen. Da aber jedes der beiden Theildreiecke dem ganzen ähnlich ist, so sind sie auch unter einander ähnlich.

Fig. 100.



Aus der Aehnlichkeit des Theildreiecks aAp und des ganzen ergeben sich folgende Proportionen:

$$a : A = A : C \quad \ldots \quad 1$$
$$a : p = A : B \quad \ldots \quad 2$$
$$p : A = B : C \quad \ldots \quad 3$$

Aus der Vergleichung des anderen Theildreiecks mit dem ganzen:

$$b : B = B : C \quad \ldots \quad 4$$
$$b : p = B : A \quad \ldots \quad 5$$
$$p : B = A : C \quad \ldots \quad 6$$

Aus der Vergleichung der beiden Theildreiecke unter einander:

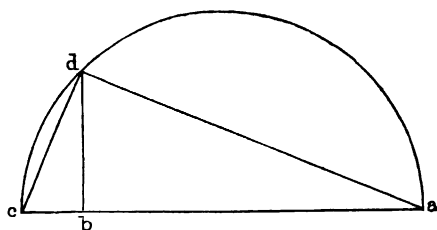
$$a : p = p : b \quad \ldots \quad 7$$
$$a : A = p : B \quad \ldots \quad 8$$
$$p : A = b : B \quad \ldots \quad 9$$

Unter diesen Proportionen wollen wir die mit 1, 4 und 7 bezeichneten näher betrachten.

Aus 1 geht hervor, daß die Kathete A die mittlere Proportionale zwischen a und der ganzen Hypotenuse ist; aus 4 folgt, daß B die mittlere Proportionale zwischen b und C ist. Darauf gründet sich nun ein Verfahren, eine Linie zu construiren, welche die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Linien ist.

Man mache auf einer beliebig gezogenen Linie ab (Fig. 101) gleich der einen und ac gleich der anderen der beiden gegebenen Linien; ziehe alsdann über ac als Durchmesser einen Halbkreis. Dieser Halbkreis wird von dem in b errichteten Perpendikel in einem Punkte d getroffen. Zieht man von d nach a eine Linie, so ist dies die verlangte mittlere Proportionale zwischen ab und ac. Man überzeugt sich leicht von der Wahrheit dieser Aussage, wenn man noch die Linie dc zieht, denn alsdann entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck adc (§. 31), von welchem alle so eben gemachten Behauptungen gelten, wonach denn auch

Fig. 101.

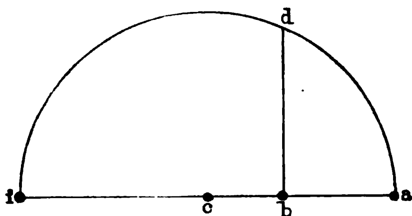


$$ab : ad = ad : ac.$$

Man construire die mittlere Proportionale zwischen 2″ und 3″, zwischen 2″ und 5″, zwischen 1″ und 4″.

Aus der Gleichung 7 folgt, daß das Perpendikel p die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken ist, in welche die Hypotenuse durch dasselbe getheilt wird. Daraus nun läßt sich eine zweite Methode ableiten, zwischen zwei gegebenen Linien eine mittlere Proportionale zu construiren. Man mache fb (Fig. 102) gleich der einen, ba gleich der anderen der beiden gegebenen Linien, so also, daß fa ihrer Summe gleich ist, construire alsdann über fa als Durchmesser einen Halbkreis; das in b errichtete Perpendikel bd ist die verlangte mittlere Proportionale. Es ist leicht, die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen.

Fig. 102.



49 **Der pythagoräische Lehrsatz.** Aus den Gleichungen 1 und 4 lassen sich jedoch noch weit wichtigere Folgerungen ziehen. Aus 1 folgt

$$A^2 = aC \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

aus 4 folgt

$$B^2 = bC \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

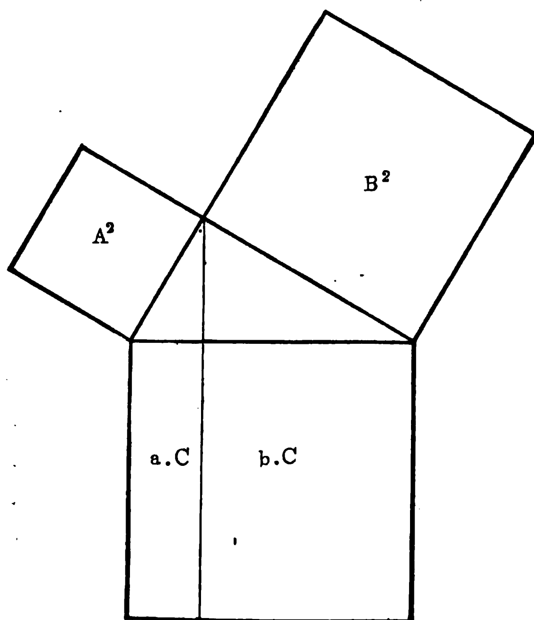
Betrachten wir zunächst die Gleichung (10). A^2 (Fig. 103) ist der Inhalt eines Quadrates, dessen Seite A ist (vergl. Fig. 103 mit Fig. 100), aC der Inhalt eines länglichen Rechtecks, dessen eine Seite a, dessen andere Seite C ist. In Fig. 103 ist das Quadrat ebenfalls durch A^2 und das längliche Rechteck durch aC bezeichnet. Nach Gleichung 10 aber ist der Inhalt dieses über der Seite A construirten Quadrats dem erwähnten Rechteck gleich. Aus Gleichung 11 folgt, daß das über B construirte Quadrat dem länglichen Rechteck gleich ist, dessen eine Seite b, dessen andere Seite C ist. Die Quadrate der beiden Katheten A und B zusammen genommen sind demnach gleich der Summe der beiden länglichen Rechtecke bC und aC; diese beiden Rechtecke bilden aber zusammen ein Quadrat, dessen Seite gleich der Hypotenuse C ist; d. h. $aC + bC = C^2$, also auch

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

die Quadrate der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind zusammengenommen gleich dem Quadrate der Hypotenuse. Dieser Satz wird der Pythagoräische Lehrsatz genannt

Der Pythagoräische Lehrsatz gehört in jeder Beziehung zu den wichtigsten Lehrsätzen der Geometrie, woher es denn auch kommen

Fig. 103.



mag, daß man für denselben eine große Anzahl von Beweisen aufgestellt hat, von welchen die meisten sich nicht, wie der eben mitgetheilte, auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke stützen. Einer der einfachsten unter diesen Beweisen ist der folgende.

Es sei *rst* (Fig. 104 a. f. S.) das rechtwinkelige Dreieck; *rsvx* das Quadrat der einen Kathete; *stzy* das Quadrat der zweiten Kathete und *rtmp* das Quadrat der Hypotenuse. Fällt man von *s* ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so theilt die Verlängerung desselben das Quadrat der Hypotenuse in zwei längliche Rechtecke *rmnu* und *utpn*. — Zieht man die Linie *sm*, so entsteht ein Dreieck *rsm*, welches mit dem länglichen Rechteck *rmnu* gleiche Grundlinie *rm* und gleiche Höhe *ru* hat, folglich ist

$$rsm = \frac{1}{2}\, runm.$$

Zieht man die Linie *xt*, so entsteht das Dreieck *xrt*, von welchem sich leicht beweisen läßt, daß

$$xrt = \frac{1}{2}\, xrsv.$$

Nun aber ist leicht zu beweisen, daß

$$\triangle rsm = \triangle xrt, \quad \text{(warum?)}$$

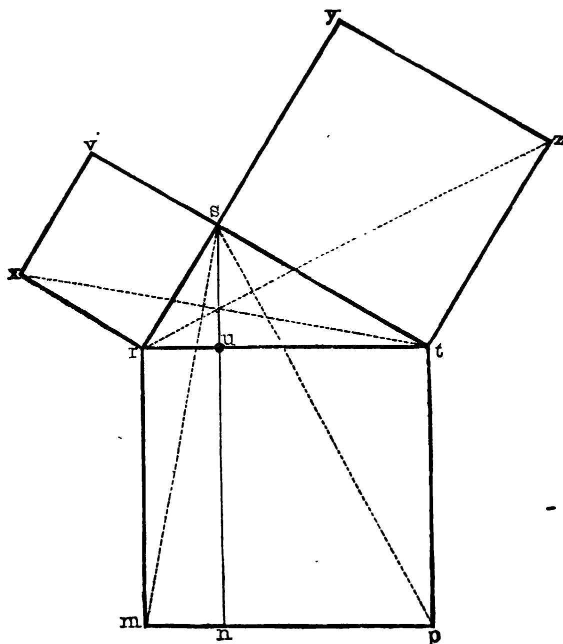
folglich ist auch

$$\tfrac{1}{2}\, runm = \tfrac{1}{2}\, xrsv,$$

und endlich

$$runm = xrsv.$$

Fig. 104.



Auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß

$$stzy = utpn,$$

also endlich auch, daß

$$xrsv + stzy = runm + unpt,$$

oder endlich

$$xrsv + stzy = rmpt,$$

was zu beweisen war.

50 **Anwendungen des pythagoräischen Lehrsatzes.** Mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes kann man immer eine Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks berechnen, wenn die beiden anderen bekannt sind. Aus Gleichung 12 folgt

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Sind die beiden Katheten A und B gegeben, so findet man die Hypotenuse C, wenn man aus der Summe der beiden Kathetenquadrate die Wurzel zieht. Wäre z. B. die eine Kathete 6′, die andere 8′, so wäre die Hypotenuse

$$C = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks seien 23′ und 32′, wie groß ist die Hypotenuse?

Aus Gleichung 12 folgt auch

$$A^2 = C^2 - B^2, \text{ also } A = \sqrt{C^2 - B^2}.$$

Ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks und eine Kathete gegeben, so findet man die andere Kathete, wenn man das Quadrat der bekannten Kathete von dem Quadrate der Hypotenuse abzieht und aus der gefundenen Differenz die Wurzel zieht. Wäre z. B. die Hypotenuse 5, die eine Kathete 4, so ist die andere

$$\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sei 28′, die eine Kathete 12′, wie groß ist die andere?

In Fig. 100 sei $A = 5$, $B = 9$ mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes und mit Hülfe der Proportionalität der Seiten, die Linien C, a, b und p zu berechnen.

Die Lösung vieler geometrischen Aufgaben läßt sich auf den Pythagoräischen Lehrsatz zurückführen, wie dies durch folgende Beispiele erläutert wird.

1. Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei 4′; wie groß ist sein Inhalt?

Auflösung. Fällt man von der Spitze des Dreiecks ein Perpendikel p auf die Grundlinie, so wird diese dadurch in zwei gleiche Theile getheilt, deren jede 2′ lang ist. Das Perpendikel p ist aber nun eine Kathete in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Hypotenuse 4′ und dessen eine Kathete 2′ ist, wir haben demnach

$$p = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}.$$

Der gefundene Werth von p ist nun die Höhe des Dreiecks, und muß mit der halben Grundlinie multiplicirt werden, wenn man den verlangten Inhalt finden will.

Bezeichnet man mit s die eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks, so ist das Perpendikel

$$p = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

und der Inhalt des Dreiecks $J = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$.

2. Die Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sei a, jede der beiden anderen Seiten sei b; wie lang ist das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel?

Antwort: $p = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

3. Die Grundlinie eines länglichen Rechtecks sei a, die Höhe b, wie groß ist die Diagonale d?

Antwort: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Jede Seite eines Quadrates sei a, wie groß ist die Diagonale?

Antwort: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

5. Die Diagonale eines Quadrates sei d, wie groß ist jede Seite a des Quadrates?

Auflösung. Nach der unter Nr. 4 gefundenen Gleichung $d = a\sqrt{2}$, in welcher d die Diagonale und a die Seite des Quadrates bezeichnet, ergiebt sich

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Der Inhalt des eben betrachteten Quadrates ist a^2, und da $d^2 = 2a^2$, so ist also der Inhalt des Quadrates, welches man über der Diagonale construiren kann, doppelt so groß, als der Inhalt des Quadrates, in welchem die Diagonale gezogen ist.

6. Der Radius eines Kreises sei r, wie groß ist die Seite a des in diesem Kreise beschriebenen Quadrates?

Antwort. Der Durchmesser des Kreises, $2r$, ist die Diagonale des Quadrates, also $a = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r \,.\, \sqrt{2}$.

7. Die Seite eines regelmäßigen Achtecks sei s, wie groß ist der Radius des in- und umschriebenen Kreises?

Die Auflösung dieser Aufgabe soll hier bloß angedeutet werden. Verlängert man die Seite ab (Fig. 105) und die ihr gegenüberstehende, ferner cd und die ihr gegenüberstehende, so entsteht ein Quadrat, dessen Seite fe gleich dem Durchmesser $2r$ des inbeschriebenen Kreises ist. $fe = dc + 2 \times ce$, $ce = \frac{bc}{\sqrt{2}} = \frac{s}{\sqrt{2}}$, also $fe = s + \frac{2s}{\sqrt{2}} = s\,(1 + \sqrt{2})$, also

$r = s \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. Der Durchmesser $2R$ des umschriebenen Kreises ist gleich ag; ag ist die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks abg, dessen Katheten bekannt sind. Es ist $ab = s$ und $bg = 2r$, folglich

$$4R^2 = s^2 + 4r^2.$$

Man führe die Rechnungen für den Fall aus, daß $s = 5'$.

Fig. 105.

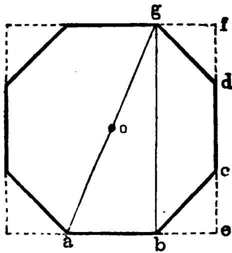
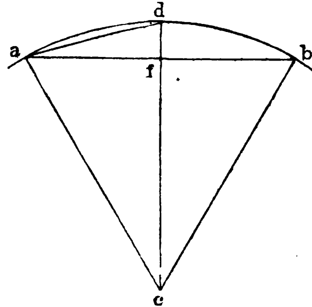


Fig. 106.



8. Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks, wenn der Radius des umschriebenen Kreises 1' beträgt?

Auflösung. Wenn der Radius des Kreises 1 ist, so ist auch die Seite ab (Fig. 106) des in den Kreis beschriebenen Sechsecks gleich 1. Die Seite ad des in demselben Kreise beschriebenen Zwölfecks ist die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks afd, also

$$\overline{ad}^2 = \overline{af}^2 + \overline{fd}^2.$$

Wäre af und fd bekannt, so ergäbe sich daraus leicht die gesuchte Zwölfecksseite; af ist die halbe Sechsecksseite, also $^1/_2$, mithin $\overline{af}^2 = {}^1/_4 = 0{,}25$; fd muß aber erst berechnet werden. $fd = cd - cf$; aus dem rechtwinkeligen Dreieck afc aber ergiebt sich $\overline{fc}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{af}^2 = 1 - {}^1/_4 = {}^3/_4 = 0{,}75$, mithin ist $fc = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866025$, also $fd = 1 - 0{,}866025 = 0{,}133975$, und endlich

$$ad = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}133975^2} = 0{,}516638.$$

Da nun die Zwölfecksseite bekannt ist, so kann man auf dieselbe Weise die Seite des in denselben Kreis beschriebenen Vierundzwanzigecks dann die Seite des Achtundvierzigecks, des Sechsundneunzigecks u. s. w. berechnen.

Es ist sehr gut, ja zum ganz klaren Verständniß des Folgenden fast unentbehrlich, alle hier angedeuteten Rechnungen auszuführen, d. h.

die Seiten der erwähnten Vielecke wirklich wenigstens bis zum Sechsundneunzigeck, und zwar bis zur sechsten Decimalstelle zu berechnen.

Ebenso berechne man die Seite eines Quadrats, welches in einen Kreis beschrieben, dessen Radius 1 ist; von diesem Quadrate ausgehend die Seiten des in denselben Kreis beschriebenen Achtecks, Sechszehnecks u. s. w.

Nachdem der Schüler alle diese Rechnungen mit der gehörigen Sorgfalt ausgeführt hat, werden ihm wohl die folgenden allgemeinen Formeln verständlich sein, welche zur Berechnung der Seite eines Vielecks dienen, wenn die Seite eines in denselben Kreis beschriebenen Vielecks von halb so viel Seiten bekannt ist. Die Vielecksseite ab (Fig. 106) sei mit S, die Seite ad eines Vielecks von doppelt so viel Seiten mit s bezeichnet. Ferner sei das vom Mittelpunkte des Kreises auf die Vielecksseite S gefällte Perpendikel cf mit p und df mit t bezeichnet, so ist

$$s^2 = \frac{1}{4} S^2 + t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$t = 1 - p$, also

$$s^2 = \frac{1}{4} S^2 + (1 - p)^2 = \frac{1}{4} S^2 + 1 - 2p + p^2 \quad . \quad (2)$$

nun aber ist $p^2 = \overline{ac}^2 - \overline{af}^2 = 1 - \frac{1}{4} S$, also $p = \sqrt{1 - \frac{1}{4} S^2}$. Setzt man diese Werthe in den Werth von s^2 in der Gleichung bei 2, so kommt

$$s^2 = \frac{1}{4} S^2 + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} S^2} + 1 - \frac{1}{4} S^2,$$

daraus

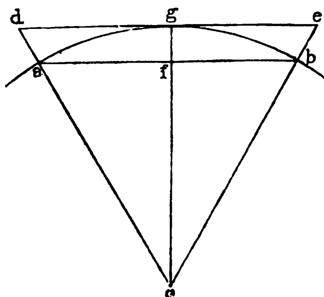
$$s^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} S^2},$$

und endlich

$$s = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} S^2}}.$$

Für das Verständniß des folgenden Abschnittes ist noch die Auflösung der folgenden Aufgabe wichtig.

Fig. 107.



Die Seite eines um einen Kreis beschriebenen Vielecks zu berechnen, wenn die Seite eines in denselben Kreis beschriebenen Vielecks von eben so viel Seiten bekannt ist. In Fig. 107 ist ab die Seite eines inbeschriebenen, de die Seite eines umschriebenen Vielecks von gleichviel Seiten; aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt

$$cf : ab = cg : de.$$

Bezeichnet man die Seite ab des inbeschriebenen Vielecks mit s, die Seite de des umschriebenen Vielecks mit S, das vom Mittelpunkte des Kreises auf s gefällte Perpendikel cf mit p, den Radius cg des Kreises mit r, so wird obige Proportion

$$p : s = r : S,$$

und daraus

$$S = \frac{s \cdot r}{p}.$$

Ist der Radius des Kreises gleich 1, so wird

$$S = \frac{s}{p}.$$

Oben wurden die Seiten eines inbeschriebenen Sechsecks, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks und Sechsundneunzigecks berechnet; wie groß sind die Seiten der entsprechenden umschriebenen Vielecke?

Achtes Kapitel.

Berechnung des Kreisumfanges und des Kreisinhaltes.

Der Kreisumfang. Das Verhältniß, in welchem die Länge des 51
Kreisumfanges zum Halbmesser desselben steht, läßt sich nicht mit absoluter Genauigkeit, sondern nur annähernd berechnen. Der Umfang eines **in** einen Kreis beschriebenen Vielecks ist jederzeit kleiner als der Umfang des Kreises selbst, jedoch wird der Umfang der inbeschriebenen Vielecke um so größer, jemehr die Zahl der Seiten zunimmt; so ist z. B. der Umfang des inbeschriebenen Zwölfecks größer als der des inbeschriebenen Sechsecks. Mit zunehmender Seitenzahl nähert sich demnach der Umfang des inbeschriebenen Vielecks immer mehr und mehr dem Umfange des Kreises, ohne daß er ihm jemals vollkommen gleich wird. So ist z. B. der Umfang eines in einen Kreis beschriebenen Tausendecks gewiß noch kleiner, als der Umfang des Kreises selbst; er ist jedoch von demselben so wenig verschieden, daß man ihn ohne bedeutenden Fehler für den Kreisumfang

selbst nehmen kann. Die angenäherte Berechnung des Kreisumfanges beruht demnach darauf, den Umfang eines Vielecks von so vielen Seiten zu berechnen, daß man ihn ohne merklichen Fehler dem Kreisumfange selbst gleichsetzen kann.

Der Umfang eines **um** den Kreis beschriebenen Vielecks ist jederzeit größer, als der Umfang des Kreises selbst; er nimmt aber mit der Zahl der Seiten fortwährend ab, und nähert sich also gleichfalls dem Kreisumfange. Dadurch hat man ein Mittel, zwei Gränzen anzugeben, zwischen welchen der Kreisumfang liegen muß.

In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne die Benennung der Vielecke, die zweite den halben Umfang des inbeschriebenen, die letzte den halben Umfang des umschriebenen Vielecks, wenn der Radius des Kreises selbst gleich 1 ist. Man erhält den halben Umfang eines solchen Vielecks leicht, wenn man den nach den Angaben auf S. 81 bis 83 gefundenen Werth der Vielecksseite mit der halben Anzahl der Seiten multiplicirt, also z. B. den halben Umfang des Vierundzwanzigecks, wenn man eine Vierundzwanzigecksseite mit 12 multiplicirt.

	Inbeschrieben	Umschrieben
6=Eck	3	3,4641
12 »	3,1058	3,2153
24 »	3,1325	3,1596
48 »	3,1393	3,1460
96 »	3,1410	3,1427

In dieser Tafel übersieht man sehr deutlich, wie der Umfang der inbeschriebenen Vielecke mit zunehmender Seitenzahl wächst, während bei den umschriebenen Vielecken gerade das Gegentheil stattfindet. Der Umfang eines Kreises, dessen Radius 1 ist, ist größer als der Umfang des in demselben beschriebenen, und kleiner als der Umfang des um denselben beschriebenen Sechsecks, er liegt also zwischen 3 und 3,4641. Diese beiden Gränzen liegen aber noch ziemlich weit von einander, deshalb kann man aus der Vergleichung des in= und umschriebenen Sechsecks noch keinen, nur etwas genauen Werth des Kreisumfanges ziehen. Die Umfänge des in= und umschriebenen Zwölfecks sind schon weniger von einander verschieden, wir erhalten dadurch schon näher beisammen

liegende Gränzen, zwischen denen der Kreisumfang liegen muß; wir sehen nämlich, daß er zwischen 3,1058 und 3,2153 liegt; noch engere Gränzen erhalten wir durch Vergleichung des in- und umschriebenen Vierundzwanzigecks u. s. w. Der halbe Umfang des inbeschriebenen Sechsundneunzigecks ist 3,1410, der des umschriebenen aber 3,1427. Zwischen diesen beiden Werthen liegt der Werth für den halben Kreisumfang. Da nun beide Zahlen bis auf zwei Decimalstellen übereinstimmen, so kann man, wenn man den halben Kreisumfang nur bis auf zwei Decimalstellen genau haben will, denselben für 3,14 annehmen. Dieser Werth ist von dem wahren Werthe des halben Kreisumfanges sicherlich nicht um 0,01 verschieden. Will man den halben Kreisumfang noch auf mehr Decimalstellen genau haben, so muß man die Umfänge der in- und umschriebenen Vielecke von noch mehr Seiten, des Einhundertzweiundneunzigecks, des Dreihundertvierundachtzigecks u. s. w., vergleichen. Bezeichnen wir mit π den halben Umfang des Kreises, dessen Radius 1 ist, so ist π auf 8 Decimalstellen genau bestimmt

$$\pi = 3{,}14159265.$$

Der halbe Umfang des Kreises wächst in demselben Verhältniß, in welchem der Radius wächst. Ist der Radius des Kreises 1, so ist der halbe Umfang $= \pi$, ist der Radius 2, so ist der halbe Umfang 2π; er ist 6π, wenn der Radius 6, 10π, wenn der Radius 10 ist. Man findet stets den halben Umfang des Kreises, wenn man seinen Radius mit π multiplicirt. Bezeichnen wir den Umfang des Kreises mit P, den Radius mit r, so ist demnach

$$\tfrac{1}{2} P = r \cdot \pi,$$

und daraus

$$P = 2 \cdot r \cdot \pi,$$

d. h. in Worten: man findet den ganzen Umfang des Kreises, wenn man den doppelten Radius, oder, was dasselbe ist, den Durchmesser mit π multiplicirt.

Beispiele. Der Radius eines Kreises ist 3′ 4″, wie groß ist sein Umfang?

Der Durchmesser eines Baumes beträgt 2′ 7″ 3‴, wie groß ist sein Umfang?

Ist der ganze Umfang bekannt, so ist es leicht, den dritten, vierten, fünften u. s. w. Theil des Umfanges zu finden; man kann demnach auch leicht folgende Aufgabe lösen. In einem Kreise, dessen Radius 18′ be-

trägt, sind zwei Halbmesser gezogen, die einen Winkel von 23° mit einander machen, wie groß ist der Bogen, den diese Halbmesser einschließen?

Aus der Gleichung $P = 2\pi . r$ zieht man

$$r = \frac{P}{2\pi}.$$

Wenn der Umfang des Kreises gegeben ist, so findet man den Radius, wenn man den Umfang durch 2π dividirt.

Der Umfang eines runden Tisches beträgt 25′, wie groß ist der Halbmesser desselben?

52 **Der Kreisinhalt.** Wie oben §. 38 gezeigt wurde, findet man den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks, wenn man den halben Umfang desselben mit dem aus dem Mittelpunkte auf eine Vielecksseite gefällten Perpendikel multiplicirt. Man findet demnach auch den angenäherten Inhalt des Kreises, indem man den Kreis als ein Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, wenn man den halben Umfang $\frac{P}{2}$ mit dem aus dem Mittelpunkte auf die Peripherie gefällten Perpendikel multiplicirt. Dieses Perpendikel ist aber nichts anderes, als der Radius; es ist demnach

$$J = \frac{P}{2} r,$$

wenn J den Inhalt des Kreises bezeichnet. Setzen wir für P seinen oben gefundenen Werth, so kommt

$$J = \pi r^2,$$

d. h. man findet den Inhalt des Kreises, wenn man den Radius mit sich selbst und das gefundene Product mit π multiplicirt.

Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Radius 27′ 5″ ist?

Aus der Gleichung $J = \pi r^2$ zieht man

$$r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}.$$

Ist der Inhalt eines Kreises bekannt, so findet man den Radius, wenn man den Inhalt durch π dividirt, und aus dem gefundenen Quotienten die Wurzel zieht.

Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 738□″, wie groß ist sein Radius?

Zweites Buch.

Stereometrie.

Einleitung.

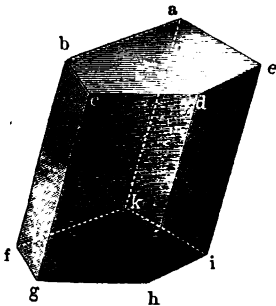
Die Stereometrie beschäftigt sich mit der Betrachtung von Kör- 53
pern, d. h. von Raumgrößen, welche nach drei Dimensionen ausgedehnt sind.

Die Elementar-Stereometrie beschränkt sich auf die Berechnung der Oberfläche und des körperlichen Inhalts von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kugeln.

Ecksäulen oder Prismen. Denkt man sich durch irgend einen 54
Punkt eines Vielecks eine gerade Linie gezogen, welche mit der Ebene dieses Vielecks einen beliebigen Winkel macht, und diese Linie dann parallel mit sich selbst an den Seiten des Vielecks hingeführt, so wird sie eine Reihe von Parallelogrammen beschreiben, die einen Körper einschließen, welcher den Namen einer Ecksäule oder eines Prisma's führt.

Denkt man sich z. B. durch den Eckpunkt b des Fünfecks $abcde$, Fig. 108, eine Linie bf gezogen, und diese Linie parallel mit sich selbst an den Kanten bc hingeschoben, so entsteht ein Parallelogramm $bcfg$. Wird die Linie alsdann weiter an cd hingeschoben, so entsteht das Parallelogramm $cdgh$ u. s. w. Die auf diese Weise entstandenen Parallelogramme bilden mit dem oberen und unteren Fünfeck eine fünfseitige Säule oder, was dasselbe ist, ein fünfseitiges Prisma.

Fig. 108.



Die Seiten, in welchen zwei der erwähnten Parallelogramme zusammentreffen, also die Kanten *bf*, *cg*, *dh*, *ei* und *ak*, werden die **Seitenkanten** des Prismas genannt.

Die Kanten, welche die genannten Parallelogramme mit dem oberen oder dem unteren Vieleck (den **Endflächen**, deren untere man gewöhnlich die **Grundfläche** nennt) des Prismas machen, also *bc*, *cd*, *de* u. s. w. *fg*, *gh*, *hi* u. s. w., heißen **Grundkanten**.

Je nachdem die Grundfläche eines Prismas 3, 4, 5 u. s. w. Seiten hat, unterscheidet man 3seitige, 4seitige, 5seitige u. s. w. Prismen.

Gerade Ecksäulen sind solche, bei welchen die Seitenkanten mit der Ebene der Grundfläche rechte Winkel bilden, wie in Fig. 109, welche eine gerade sechsseitige Säule darstellt. Die Seitenflächen einer geraden Ecksäule sind sämmtlich längliche Rechtecke.

Fig. 109.



Eine vierseitige Ecksäule, deren Basis ein Parallelogramm ist, ein Körper also, welcher von lauter Parallelogrammen begränzt wird, heißt ein **Parallelopipedum**.

Ein Parallelopiped, welches von lauter länglichen Rechtecken begränzt ist, also eine gerade Ecksäule, deren Basis ein längliches Rechteck ist, Fig. 110, wird **Langwürfel** genannt.

Ein von sechs **Quadraten** begränztes Parallelopiped, Fig. 111, wird ein **Würfel** genannt.

Fig. 110.



Fig. 111.



Fig. 112.



55 **Pyramiden oder Spitzsäulen.** Denkt man sich von irgend einem Punkte, welcher außerhalb eines Vielecks und auch außerhalb der Ebene desselben liegt, Linien nach den Eckpunkten dieses Vielecks gezogen, Fig. 112

so entsteht eine Reihe von Dreiecken, welche mit dem besprochenen Vieleck (der Grundfläche) eine Pyramide, eine Spitzsäule, bilden.

Wenn die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck ist, und wenn der Mittelpunkt dieses regelmäßigen Vielecks gerade unter der Spitze liegt, so ist die Pyramide eine regelmäßige.

Fig. 113 ist eine regelmäßige vierseitige und Fig. 114 ist eine regelmäßige sechsseitige Pyramide.

Fig. 113.

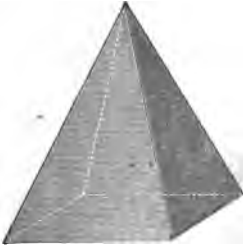


Fig. 114.



An jeder regelmäßigen Pyramide sind alle Seitenflächen einander gleich, und zwar sind es lauter gleichseitige Dreiecke.

Cylindrische und conische Flächen. Wenn das Vieleck, an 56
dessen Kanten hin die Erzeugungslinie parallel mit sich selbst fortgeschoben wird, ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, also eine krumme Linie ist, so entsteht eine Cylinderfläche. Der durch die Cylinderfläche und die beiden Endflächen begränzte Körper heißt ein Cylinder oder eine Walze. In der Elementargeometrie betrachtet man nur Cylinder von kreisförmiger Basis. Man erhält einen geraden Cylinder, wenn die erzeugende Linie auf der Ebene des leitenden Kreises rechtwinkelig steht.

Fig. 115 stellt einen geraden, Fig. 116 stellt einen schiefen Cylinder dar.

Fig. 115.

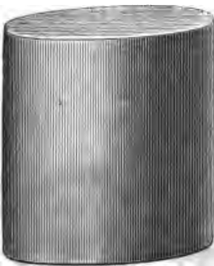


Fig. 116.



Der Kegel, Conus, steht zu der Pyramide in demselben Verhältniß, wie der Cylinder zum Prisma. Wenn die Basis einer Pyramide in eine krumme Linie übergeht, so wird die Pyramide zum Kegel.

In der Elementargeometrie betrachtet man nur Kegel von kreisförmiger Basis.

Fig. 117.



Fig. 118.



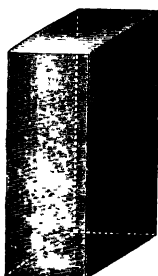
Fig. 117 stellt einen geraden, Fig. 118 stellt einen schiefen Kegel dar.

Erstes Kapitel.

Berechnung der Körperoberflächen.

Oberflächen der Prismen. Da die Prismen von lauter ebenen Flächen begränzt sind, so findet man ihre Gesammtoberfläche, wenn man den Flächeninhalt jeder einzelnen Gränzfläche nach den Lehren der ebenen Geometrie berechnet und die Flächeninhalte aller einzelnen Gränzflächen addirt. 57

Fig. 119.

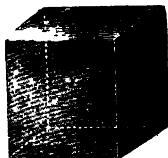


Es seien z. B. die beiden Seiten der Grundfläche des Langwürfels (Fig. 119) 7 Zoll und 18 Zoll, seine Höhe 20 Zoll, so ist der Inhalt der Grundfläche $7 \times 18 = 126 \square''$. Die obere Gränzfläche ist gerade eben so groß. Der Inhalt der Fläche rechts ist $20 \times 18 = 360 \square''$, und eben so groß ist die Fläche links. Der Inhalt der vorderen Fläche sowohl als der der hinteren ist aber $7 \times 20 = 140 \square''$. Wir haben also

für die obere und untere Fläche	. . . .	$2 \times 126 = 252 \square''$
für die vordere und hintere Fläche	. . .	$2 \times 140 = 280 \square''$
für die Flächen rechts und links	. . .	$2 \times 360 = 720 \square''$
Die Gesammtoberfläche des Langwürfels ist also	. . . .	$1252 \square''$.

Da die sechs Gränzflächen eines Würfels sämmtlich Quadrate und einander gleich sind, so findet man die Oberfläche eines Würfels, wenn man die zweite Potenz der Würfelkante mit 6 multiplicirt. Wäre z. B. die Seite eines Würfels 5 Zoll, so wäre seine Gesammtoberfläche $6 . 5^2 = 150 \square''$.

Fig. 120.



Bei geraden Prismen sind alle Seitenflächen längliche Rechtecke; sie haben sämmtlich gleiche Höhe, und zwar ist diese Höhe

gleich der Länge einer Seitenkante. Wenn nun die Grundfläche eines geraden Prismas ein Vieleck ist, dessen Seiten wir mit s', s'', s''' u. s. w. bezeichnen wollen, und wenn die Höhe dieses Prismas h ist, so ist der Inhalt der ersten Seitenfläche $s'h$, der der zweiten $s''h$, der der dritten $s'''h$ u. s. w. Die Gesammtoberfläche aller Seitenflächen des geraden Prismas ist demnach $s'h + s''h + s'''h$ ꝛc., oder es ist

$$O = h\,(s' + s'' + s''' + \text{ꝛc.}),$$

wenn wir mit O den Gesammtflächeninhalt aller Seitenflächen bezeichnen. Nun ist aber das, was in der Klammer steht, der Umfang der Grundfläche, den wir mit u bezeichnen wollen, es ist also auch

$$O = hu,$$

das heißt in Worten: man findet den Gesammtinhalt aller Seitenflächen eines geraden Prismas, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Aufgaben zu §. 57.

1. Die Seite eines Würfels ist 7^{cm}; wie groß ist seine Oberfläche?

2. Die Oberfläche eines Würfels ist $10{,}14\,\square''$, wie groß ist die Kante desselben?

3. Wie groß ist die Gesammtoberfläche eines geraden Prismas, welches 9^{cm} hoch, dessen Grundfläche aber ein Rechteck von 12^{cm} Länge und 7^{cm} Breite ist?

4. Die Höhe einer regelmäßigen geraden fünfseitigen Säule ist 6 Fuß, eine Seite der Grundfläche ist $2'\ 3''$ (Duodecimalmaaß); wie groß ist der Gesammtinhalt aller Seitenflächen?

5. Die Gesammtoberfläche einer geraden quadratischen Säule (d. h. einer Säule, deren Basis ein Quadrat ist) beträgt $120\,\square^{cm}$; die Seite der Basis beträgt 5^{cm}; wie groß ist die Höhe dieser Säule?

6. Die Basis einer Ecksäule ist ein gleichseitiges Dreieck von $6''$ Seite; die Höhe der Ecksäule ist $8''$; wie groß ist die Gesammtoberfläche?

7. Eine Ecksäule von 15^{cm} Höhe hat zur Basis ein reguläres Sechseck von 3^{cm} Seite; wie groß ist die Gesammtoberfläche dieser Ecksäule?

8. Die Diagonale eines Langwürfels zu berechnen, wenn die Kanten desselben gegeben sind.

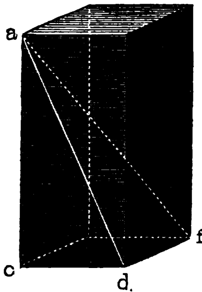
Auflösung. Bezeichnen wir die Höhe ac des Langwürfels Fig. 121 mit h, seine Breite cd mit b, seine Tiefe df mit t, so haben wir

$$ad^2 = h^2 + b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nun aber ist adf ein bei d rechtwinkeliges Dreieck, folglich

$$af^2 = ad^2 + df^2;$$

Fig. 121.



setzen wir für ad^2 seinen Werth bei (1), für df seinen Werth t, für die Diagonale af den Werth d, so kommt

$$d^2 = h^2 + b^2 + t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für einen Würfel, dessen Seitenlänge s ist, haben wir $h = b = t = s$, mithin auch

$$d^2 = 3\,s^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder

$$s^2 = \frac{d^2}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Es sei für einen Langwürfel $h = 7''$, $b = 3''\ 7'''$ (Duodecimalmaaß) und $t = 4''\ 5'''$; wie groß ist die Diagonale dieses Langwürfels? (nach Gleichung 2).

Die Seite eines Würfels sei 5^{cm}; wie groß ist seine Diagonale? (nach Gleichung 3).

Die Diagonale eines Würfels sei 5^{cm}; wie groß ist jede seiner Kanten? (nach Gleichung 4).

9. Die Gesammtoberfläche eines Würfels soll 100 Quadratzoll sein; wie groß ist jede seiner Kanten, wie groß seine Diagonale?

10. Die Diagonale eines Würfels sei $7''$; wie groß ist der Inhalt einer Seitenfläche?

Die Oberfläche der Cylinder. Da man die Cylinder als Eck- 58
säulen von unendlich vielen Seiten betrachten kann, so findet man den Inhalt der Mantelfläche eines geraden Cylinders, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Cylinders multiplicirt.

Bezeichnen wir mit r den Radius des Kreises, welcher die Grundfläche bildet, so ist $2\pi r$ der Umfang dieses Kreises, und demnach ist

$$O = 2\pi r h,$$

wenn O der Inhalt der Mantelfläche und h die Höhe des geraden Cylinders bezeichnet.

Um die Gesammtoberfläche eines Cylinders zu finden, muß man zu der Mantelfläche noch den Inhalt des oberen und des unteren Kreises hinzufügen.

Aufgaben.

1. Der Durchmesser eines geraden Cylinders beträgt 27^{cm}, seine Höhe 52^{cm}. Wie groß ist der Inhalt der Mantelfläche? Wie groß ist der Flächeninhalt des oberen und des unteren Kreises? Wie groß ist die Gesammtoberfläche?

2. Die Gesammtoberfläche eines Cylinders beträgt $196 \square^{cm}$, der Durchmesser seines Grundkreises beträgt 8^{cm}; wie groß ist seine Höhe?

59 **Oberfläche der Pyramiden.** Eine jede Pyramide ist begränzt durch ein Vieleck, welches die Grundfläche bildet, und eine Reihe von Seitenflächen, welche sämmtlich Dreiecke sind. Hier ist nur die Rede von geraden, regelmäßigen Pyramiden; ihre Grundfläche ist ein regelmäßiges Vieleck, dessen Inhalt auf die bekannte Weise gefunden wird. Die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind lauter einander gleiche, gleichschenkelige Dreiecke.

Fig. 122.

a
c
p
d
b

Fig. 123.

Bezeichnen wir mit s die Länge einer Grundkante bc einer regelmäßigen Pyramide, mit l die Länge des von der Spitze a auf diese Grundkante gefällten Perpendikels ad, so hat man bekanntlich für den Flächeninhalt J des Dreiecks abc

$$J = \frac{ls}{2}.$$

Ist nun ferner n die Seitenzahl der Grundfläche, so ist der Gesammtinhalt O aller Seitendreiecke der Pyramide

$$O = \frac{n.s.l}{2}.$$

Da nun aber ns der Umfang der Grundfläche ist, den wir mit u bezeichnen wollen, so ist auch

$$O = \frac{u.l}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder mit Worten: man findet den Inhalt aller Seitendreiecke einer geraden, regelmäßigen Pyramide, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der halben Höhe eines Seitendreiecks multiplicirt.

Gewöhnlich ist die Höhe ad des Seitendreiecks nicht unmittelbar gegeben; dagegen kennt man entweder die Länge der Seitenkanten (also z. B. ab in Fig. 122) oder die Höhe der Pyramide (ap in Fig. 122). Aus diesen Angaben läßt sich alsdann leicht die Höhe l (ad in Fig. 122) mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes berechnen.

Aufgaben.

1. Die Basis einer geraden Pyramide sei ein Quadrat, dessen Seite 3″ beträgt; die verticale Höhe der Pyramide (ap Fig. 122) sei 4″; wie groß ist die Gesammtoberfläche der Pyramide?

2. Die Seite der Basis einer geraden quadratischen Pyramide sei 7^{cm}, die Seitenkante (ab Fig. 122) sei 12^{cm}; wie groß ist die Gesammtoberfläche der Pyramide?

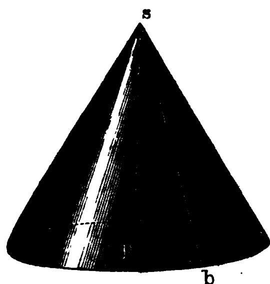
3. Die Basis einer regelmäßig dreiseitigen Pyramide hat einen Umfang von 12″, die Länge einer Seitenkante beträgt 3″; wie groß ist ihre Gesammtoberfläche?

4. Jede Grundkante einer regelmäßig dreiseitigen Pyramide hat eine Länge von 6″; die verticale Höhe dieser Pyramide sei 5″; wie groß ist ihre Gesammtoberfläche?

5. Die Grundkante einer regelmäßig sechsseitigen Pyramide sei 6″, ihre Höhe sei 8″; wie groß ist ihre Gesammtoberfläche?

Die Oberfläche gerader Kegel läßt sich nach den im vorigen Paragraphen erläuterten Principien berechnen; man hat nur in die Gleichung (1) auf Seite 96 für u den Umfang des Grundkreises, für l die Länge der Linie sb (Figur 124) zu setzen, die man von der Spitze s zu irgend einem Punkte b des Umfangs der Grundfläche ziehen kann. 60

Fig. 124.



Ist r der Radius des Grundkreises, so ist $2\pi r$ sein Umfang. Bezeichnen wir mit h die Höhe sp des Kegels, so ist $sb = \sqrt{\overline{sp}^2 + \overline{pb}^2}$, oder $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Der Flächeninhalt der Mantelfläche eines geraden Kegels ist demnach

$$J = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Aufgaben.

1. Der Radius der Basis eines geraden Kegels sei 2^{cm}, seine Höhe sei 3^{cm}; wie groß ist der Inhalt seiner Mantelfläche? Wie groß ist der Flächeninhalt der Basis?

2. Die Mantelfläche eines geraden Kegels, welcher 7″ hoch ist, hat einen Flächeninhalt von 25 Quadratzollen; wie groß ist der Radius des Grundkreises?

61 **Die Oberfläche eines abgestumpften geraden Kegels,** Fig. 125, kann als ein Paralleltrapez betrachtet werden, dessen parallele Seiten durch den Umfang des oberen und des unteren Kreises gebildet werden, und dessen Höhe gleich ist der Seite ab des abgestumpften Kegels.

Fig. 125.



Bezeichnen wir mit R den Radius des unteren, mit r den Radius des oberen Kreises, Fig. 125, mit s die Länge ab des abgestumpften Kegels, so ist demnach der Flächeninhalt seiner Mantelfläche

$$J = 2\pi \left(\frac{R + r}{2}\right) s.$$

Nun ist aber $\frac{R + r}{2}$ auch der Radius eines Kreises, welcher in der Mitte zwischen dem oberen und dem unteren um die Kegelfläche herumläuft, und welchen wir als **Mittelkreis** bezeichnen wollen. In Fig. 125 ist $cdfg$ der Mittelkreis.

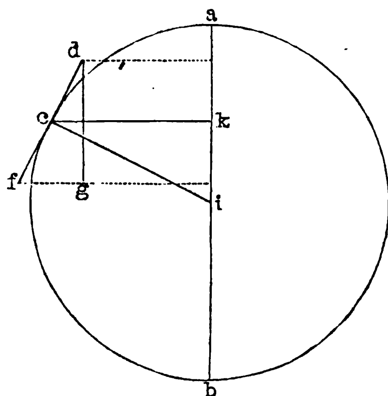
Man kann demnach sagen: die Oberfläche des Mantels eines abgestumpften geraden Kegels wird gefunden, wenn man den Umfang seines Mittelkreises mit der Seitenlänge des abgestumpften Kegels multiplicirt.

An einem abgestumpften Kegel sei der Radius des unteren Kreises 4″, der des oberen 3″, die Seite ab aber 3,5″; wie groß ist die Mantelfläche dieses abgestumpften Kegels?

62 **Beziehungen des abgestumpften Kegels zu der Kugel, welche ihn in seinem Mittelkreise berührt.** Denken wir uns den Kreis Fig. 126 um die Axe ab umgedreht, so entsteht durch die Be-

wegung der Kreislinie offenbar eine Kugeloberfläche. Es sei nun in irgend einem Punkte c des Kreises eine Tangente an denselben gezogen, und auf dieser von c aus nach beiden Seiten gleiche Längen cf und cd abgeschnitten, so entsteht durch die Umdrehung der Linie df um die Axe ab die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels, welche von der erwähnten Kugel in ihrem Mittelkreise berührt wird.

Fig. 126.



Denken wir uns nun in Fig. 126 von c ein Perpendikel ck auf die Umdrehungsaxe gefällt, so ist dies der Radius des Mittelkreises für die fragliche Kegelfläche, den wir mit r bezeichnen wollen. Der Flächeninhalt dieser Mantelfläche ist nach Obigem

$$J = 2\pi r s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn mit s die Länge df bezeichnet wird.

Fällt man nun ferner von d auf eine durch f mit ck parallel gezogene Linie ein Perpendikel fg, welches nichts anderes ist als die verticale Höhe des abgestumpften Kegels, die wir mit h bezeichnen wollen, zieht man ferner den Radius ci, dessen Länge durch R bezeichnet werden soll, so entstehen die ähnlichen Dreiecke dfg und cik, aus welchen sich folgende Proportion ergiebt:

$$dg : fd = ck : ci$$

oder

$$h : s = r : R$$

und daraus

$$s . r = hR.$$

Wir können also in Gleichung (1) für rs das Product Rh setzen, ohne daß der Werth von J geändert wird, und haben also

$$J = 2\pi Rh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nun ist aber $2\pi R$ der Umfang der Kugel, welche den abgestumpften Kegel in seinem Mittelkreise berührt, und h ist die vertikale Höhe des abgestumpften Kegels; die Gleichung (2) läßt sich also in Worten so ausdrücken:

Die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels hat gleichen Flächeninhalt mit der Mantelfläche eines Cylinders, dessen Durchmesser so groß ist wie der Durchmesser der Kugel, welche den abgestumpften Kegel in ihrem Mittelkreise berührt, und dessen Höhe gleich ist der verticalen Höhe des abgestumpften Kegels.

63 **Berechnung der Kugeloberflächen.** Um einen Kreis, Fig. 127, sei ein regelmäßiges Achteck gezogen und dasselbe um den Durchmesser

Fig. 127.

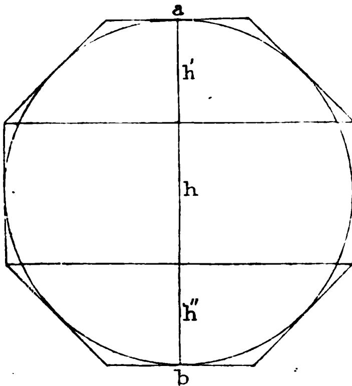


Fig. 128.



ab umgedreht, welcher zwei parallele Seiten des Achtecks mit einander verbindet, so entsteht durch die Umdrehung des Kreises eine Kugel; durch die Umdrehung der Achtecksseiten aber der Körper, welcher Fig. 128 dargestellt ist.

Diesen Körper können wir uns in drei Theile zerlegt denken. Der mittlere ist ein Cylinder, welcher mit der Kugel gleichen Radius R hat, dessen Höhe wir aber mit h bezeichnen wollen; die Mantelfläche dieses Cylinders hat also den Inhalt

$$2\pi Rh.$$

An diesen Cylinder setzt sich oben und unten ein abgestumpfter Kegel an, welcher von der Kugel in seinem Mittelkreise berührt wird, und dessen Höhe wir mit h' bezeichnen wollen. Die Mantelfläche jeder dieser abgestumpften Kegelflächen ist:

$$2\pi Rh'.$$

Die Oberfläche O der mittleren Cylinderfläche und der beiden sich an dieselbe ansetzenden abgestumpften Kegelflächen zusammen genommen ist also

$$O = 2\pi R\,(h' + h + h').$$

Die Summe der Höhen $h' + h + h'$ ist aber offenbar dem Durchmesser ab der Kugel gleich; der Gesammtinhalt jener cylindrischen und conischen Flächen ist also

$$O = 2\pi R\,.\,2R = 4\pi R^2.$$

Denken wir uns in gleicher Weise um einen Kreis vom Radius R ein regelmäßiges Sechszehneck, Fig. 129, gezogen und dasselbe um den

Fig. 129.

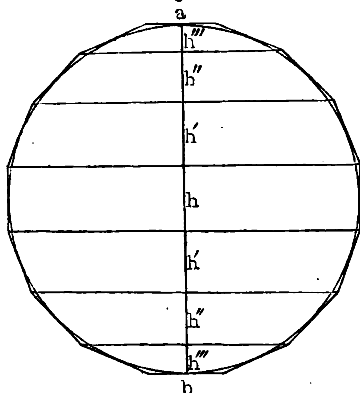


Fig. 130.



Kugeldurchmesser ab umgedreht, so entsteht der Rotationskörper Fig. 130, welcher durch eine mittlere Cylinderfläche und sechs abgestumpfte Kegelflächen gebildet wird, von denen je zwei einander gleich sind, und welche sämmtlich von der durch die Umdrehung des Kreises gebildeten Kugel in ihrem Mittelkreise berührt werden. Bezeichnen wir mit h die Höhe der mittleren Cylinderfläche, mit h', h'' und h''' die Höhe der nach oben und nach unten der Reihe nach folgenden abgestumpften Kegel, so ist die Oberfläche derselben von oben anfangend der Reihe nach

$$2\pi Rh'''$$
$$2\pi Rh''$$
$$2\pi Rh'$$
$$2\pi Rh$$
$$2\pi Rh'$$
$$2\pi Rh''$$
$$2\pi Rh''',$$

also der Gesammtinhalt aller dieser Rotationsflächen

$$2\pi R\,(h''' + h'' + h' + h + h' + h'' + h''').$$

Die Summe der in den Klammern stehenden Höhen ist aber nichts anderes als der Durchmesser des Kreises Fig. 129, also $2R$, mithin ist die Gesammtoberfläche des Rotationskörpers Fig. 130 (mit Ausschluß des oben und unten begränzenden Kreises) ebenfalls

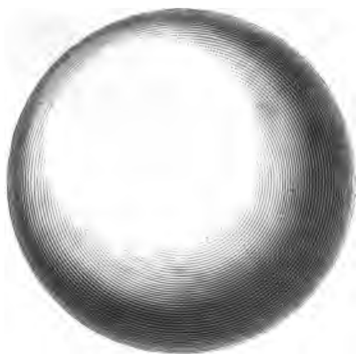
$$O = 4\pi R^2.$$

Wir können auf dieselbe Weise fortschließen, daß, wie man auch die Seitenzahl des um den Kreis beschriebenen Vielecks vermehren möge, doch die Gesammtoberfläche aller abgestumpften Kegelflächen (mit Einschluß der mittleren Cylinderfläche), welche entstehen, wenn man die ganze Figur um den Kreisdurchmesser umdreht, welcher zwei diametral gegenüber liegende Vielecksseiten mit einander verbindet, stets

$$4\pi R^2$$

sein muß. Dies gilt natürlich auch noch, wenn die Zahl der Vielecksseiten bis ins Unendliche vermehrt wird, für welchen Fall dann die Gesammtheit aller abgestumpften Kegel in die Kugel Fig. 131 übergeht, deren Oberfläche demnach gleichfalls

Fig. 131.



$$O = 4\pi R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, wenn R den Radius derselben bezeichnet.

$4\pi R^2$ ist aber auch die Mantelfläche eines Cylinders, dessen Durchmesser $2R$ und dessen Höhe $2R$ ist; wir können deshalb auch sagen: **Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der Mantelfläche eines Kegels, welcher mit der Kugel gleichen Durchmesser und gleiche Höhe hat.**

Aufgaben.

1. Der Radius einer Kugel sei 3'' oder 5cm oder 13'; wie groß ist ihre Oberfläche?

2. Der Durchmesser der Erde ist gleich 1720 deutsche Meilen; wie viel Quadratmeilen beträgt ihre Oberfläche?

3. Der Durchmesser des Mondes verhält sich zu dem der Erde wie 3 zu 11; in welchem Verhältniß steht die Oberfläche des Mondes zur Oberfläche der Erde?

4. Die Oberfläche einer Kugel soll 3 □ Meter betragen; wie groß muß ihr Radius sein?

5. Wie viel Zoll ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche 1 Quadratfuß alt pariser Maaß ist?

Zweites Kapitel.

Berechnung des körperlichen Inhalts.

Die Körpereinheiten. Den Rauminhalt eines Körpers kann man nur dadurch bestimmen, daß man ermittelt, wie oftmals ein Körper von bekannter Größe, den man als Körpereinheit annimmt, in demselben enthalten ist. 64

Als Raumeinheit nimmt man den Würfel (Cubus), dessen Kante gleich ist der Längeneinheit. Es giebt demnach ebenso viel verschiedene Körpereinheiten, als es Längeneinheiten giebt. Fig. 132 stellt einen preußischen Kubikzoll, Fig. 133 eine preußische Kubiklinie und Fig. 134 ein Kubikcentimeter dar.

Fig. 132.

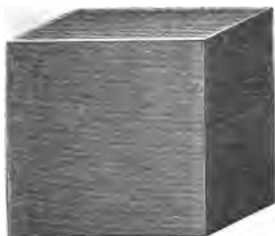


Fig. 133.



Fig. 134.

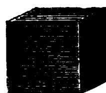


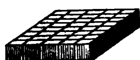
Fig. 135.



Wenn man die Längendimensionen eines Langwürfels kennt, so ist es leicht, seinen Körperinhalt (Kubikinhalt) zu berechnen. Es sei z. B. der Langwürfel, Fig. 135, 5''' breit, 8''' dick und 12''' hoch, so ist seine

Grundfläche offenbar $5 \times 8 = 40$ Quadratlinien, und auf diese Grundfläche kann man also 40 Würfelchen aufsetzen, deren Seite 1''' ist, wie

Fig. 136.



dies Fig. 136 anschaulich macht. Solcher 40 Kubiklinien enthaltender, 1''' hoher Lagen muß man aber 12 aufeinander setzen, um einen dem Langwürfel Fig. 135 gleichen Körper zu erhalten; der Inhalt desselben ist also

$$5 \times 8 \times 12 = 480 \text{ Kubiklinien.}$$

Bezeichnet man allgemein die drei Dimensionen eines Langwürfels mit a, b und c, so ist sein körperlicher Inhalt

$$J = a \times b \times c.$$

Wenden wir das auf die Inhaltsberechnung eines Würfels an, dessen Seitenlänge gleich a ist, so haben wir für diesen auch $b = a$ und $c = a$, folglich ist der körperliche Inhalt dieses Würfels

$$J = a \times a \times a = a^3.$$

Man findet also den körperlichen Inhalt eines Würfels, wenn man die Seitenlänge in die dritte Potenz erhebt.

Der körperliche Inhalt eines Würfels, dessen Kanten 4 Centimeter lang sind, ist demnach

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64 \text{ Kubikcentimeter.}$$

Die körperlichen Inhalte verschiedener Würfel verhalten sich demnach wie die dritten Potenzen ihrer Seitenlängen. Wenn die Seite eines Würfels 2-, 3-, 4mal so groß wird, so wird sein Inhalt 8-, 27-, 64mal größer.

Die verschiedenen Kubikeinheiten verhalten sich demnach auch wie die dritten Potenzen der entsprechenden Längeneinheiten.

Es ist demnach:

$$1^{\text{cub met}} = 1000^{\text{cub decimet}}$$
$$1^{\text{cub dm}} = 1000^{\text{cub centimet}}$$
$$1^{\text{cub cm}} = 1000^{\text{cub millim.}}$$

Ferner ist

$$1^{\text{cub}\,\prime} = 1000^{\text{cub}\,\prime\prime}$$
$$1^{\text{cub}\,\prime\prime} = 1000^{\text{cub}\,\prime\prime\prime}$$

für zehntheiliges Fußmaaß, während für Duodecimalmaaß

$$1^{\text{cub}\,\prime} = 1728^{\text{cub}\,\prime\prime}$$
$$1^{\text{cub}\,\prime\prime} = 1728^{\text{cub}\,\prime\prime\prime}.$$

Aufgaben.

1. Wie viel pariser Kubikfuß enthält eine Kubiktoise?

2. Wie viel Kubikcentimeter enthält ein badischer Kubikzoll?

3. Wie viel Kubikmillimeter enthält ein preußischer Kubikzoll?

4. Wie viel Kubikcentimeter sind dies?

5. In welchem Verhältniß steht ein pariser Kubikzoll zu einem preußischen?

6. In welchem Verhältniß steht der österreichische Kubikzoll zum englischen?

NB. Um diese Aufgaben zu lösen, sind die Verhältnisse der entsprechenden Längeneinheiten aus §. 3, Seite 5 und 6, zu entnehmen.

Inhaltsberechnung gerader Prismen und Cylinder. Nach dem, was im vorigen Paragraphen besprochen wurde, ist es klar, daß man den kubischen Inhalt einer geraden Ecksäule findet, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt; d. h. es ist 65

$$J = g \times h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wenn J den cubischen Inhalt der Ecksäule, g den Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe der Säule bezeichnet.

Dieselbe Gleichung gilt auch zur Berechnung des körperlichen Inhalts gerader Cylinder.

Aufgaben.

1. Die Grundfläche einer geraden Ecksäule sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge 5″ beträgt; die Höhe der Ecksäule sei 12″; wie groß ist ihr Körperinhalt?

2. Die Grundfläche einer geraden Ecksäule sei ein regelmäßiges Sechseck von 7^{cm} Seitenlänge; die Höhe der Ecksäule sei 15^{cm}; wie groß ist ihr Körperinhalt?

3. Wie groß ist der Körperinhalt einer regelmäßig achtseitigen, geraden Ecksäule, wenn jede Achtecksseite 3 Centimeter lang und die Säule 9 Centimeter hoch ist?

4. Wie groß ist der Körperinhalt eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis, wenn der Durchmesser dieser Basis 3″ 2‴ preuß. und seine Höhe 5″ 7‴ beträgt?

Körperinhalt schiefer Ecksäulen und Pyramiden. Um den körperlichen Inhalt J einer schiefen Ecksäule zu berechnen, hat 66

man nur den Quadratinhalt g der Grundfläche mit der verticalen Höhe h der Säule zu multipliciren; es kommt also auch hier die Formel

$$J = gh \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in Anwendung. Unter der verticalen Höhe einer schiefen Ecksäule, Fig. 139, versteht man aber die Länge des Perpendikels ab, welches man von irgend einem Punkte a der oberen (mit der Grundfläche parallelen) Endflächen acd auf die Ebene der Grundfläche fällen kann.

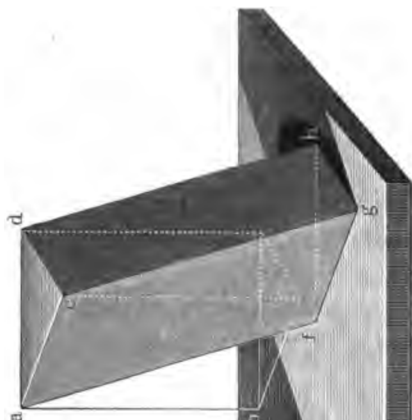


Fig. 139.



Fig. 138

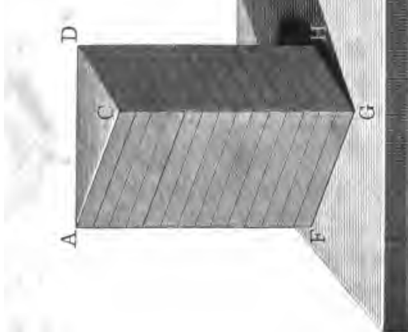


Fig. 137.

Die Anwendung der Formel (1) zur Inhaltsberechnung schiefer Ecksäulen stützt sich auf den Satz, daß **Ecksäulen von gleicher Grundfläche und Höhe auch gleichen Körperinhalt haben.**

Der Beweis dieses Satzes läßt sich am einfachsten auf folgende Weise führen.

Denken wir uns irgend eine gerade Ecksäule, Fig. 137, durch gleich weit von einander abstehende, mit der Grundfläche parallele Ebenen in eine Reihe gleich hoher Scheiben zerschnitten,

so lassen sich diese Scheiben in der Weise verschieben, daß die entsprechenden Ecken aller einzelnen Scheibchen, welche ursprünglich eine Kante DH der geraden Ecksäule bildeten, nun wieder in einer geraden Linie dh liegen, welche nicht mehr rechtwinkelig auf der Basis steht. Auf diese Weise entsteht ein aus treppenförmig übereinander gelegten Scheibchen zusammengesetzter Körper, Fig. 138, welcher mit der geraden Ecksäule, Fig. 137, gleichen Körperinhalt hat, da er ja aus denselben Theilschichten besteht wie die Ecksäule, nur daß dieselben hier anders aufgebaut sind als dort.

Die Richtigkeit unseres Schlusses ist von der Höhe der einzelnen Theilschichten vollkommen unabhängig; er bleibt richtig, wie sehr wir auch die Höhe der einzelnen Theilschichten vermindern, also auch ihre Anzahl vermehren mögen. Bei mehr und mehr abnehmender Höhe geht aber die Gesammtheit der verschobenen Theilschichten auch mehr und mehr in die schiefe Ecksäule, Fig. 139, über, welche demnach bei gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ($ab = AF$) auch gleichen Körperinhalt mit der geraden Ecksäule, Fig. 137, hat.

Es gilt dieser Satz natürlich ebenso für eine vierseitige, fünfseitige, sechsseitige Ecksäule, wie für eine dreiseitige, da unsere Beweisführung ja von der Seitenzahl der Basis völlig unabhängig war; er gilt mithin auch für Cylinder, d. h. der Kubikinhalt eines schiefen Cylinders ist gleich dem Kubikinhalt eines geraden von gleicher Grundfläche und Höhe.

Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe haben ebenfalls gleichen Körperinhalt. Die eben durchgeführte Beweisführung läßt sich ohne Weiteres auch auf Pyramiden übertragen; es mag deshalb genügen, dies anzuführen. Der Schüler mag die Ausführung des Beweises selbst versuchen.

Der Kubikinhalt einer Pyramide ist $1/3$ vom Kubikinhalt einer Ecksäule, die mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. 67

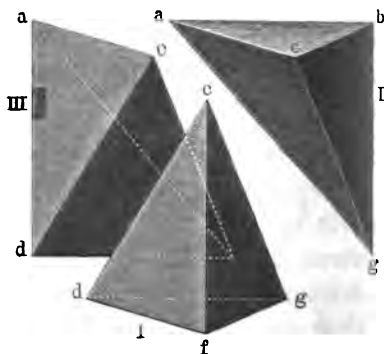
Beweis. Es sei $abcdfg$, Fig. 140 (a. f. S.), eine gerade dreiseitige Säule. Denken wir uns eine Schnittfläche durch das Eck c und die Kante dg, und eine zweite durch das Eck g und die Kante ac gelegt, so wird dadurch die dreiseitige Ecksäule in drei Pyramiden getheilt, welche in Fig. 141 (a. f. S.) auseinander gerückt gezeichnet und mit I, II und

III bezeichnet sind. Die Pyramiden I und II haben gleichen Körperinhalt, denn die Grundfläche *dfg* der einen ist gleich der Grundfläche *abc* der anderen, und ferner ist die Höhe *fc* gleich der Höhe *bg*.

Fig. 140.



Fig. 141.



Daß aber auch I gleich III ist, ergiebt sich, wenn man *acd* als die Grundfläche der Pyramide III, *cdf* aber als Grundfläche der Pyramide I betrachtet. Für diesen Fall ist *g*, Fig. 140, die gemeinschaftliche Spitze der beiden Pyramiden, und das von *g* auf die gegenüberstehende Fläche *acfd* gefällte Perpendikel ihre gemeinschaftliche Höhe; die Pyramiden I und III haben also gleiche Grundflächen und gleiche Höhe, folglich ist auch ihr Körperinhalt gleich.

Die drei Pyramiden I, II und III haben also gleichen Körperinhalt, und da sie zusammen die Eckſäule Fig. 140 bilden, so ist der Inhalt einer jeden derselben $^1/_3$ von dem Inhalte dieser Eckſäule.

Bezeichnen wir mit *g* die Grundfläche, mit *h* die Höhe der Eckſäule Fig. 140, so ist der Körperinhalt derselben *gh*, folglich der Körperinhalt *J* einer jeden der drei Pyramiden Fig. 141

$$J = \frac{gh}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

d. h. in Worten: man findet den Körperinhalt einer Pyramide, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und das so erhaltene Product mit 3 dividirt.

Obige Gleichung (1) gilt natürlich auch zur Berechnung des Körperinhalts von Kegeln.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Körperinhalt einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge 2″, deren Höhe aber 3″ ist?

2. Wie groß ist der Körperinhalt einer quadratischen Pyramide, wenn jede Seite der Basis 7^{cm}, ihre Höhe aber 8^{cm} ist?

3. Wie groß ist der Körperinhalt eines regulären Tetraëders, d. h. eines durch drei gleichseitige Dreiecke begränzten Körpers, wenn die Länge jeder Kante 5 Centimeter ist?

Berechnung des körperlichen Inhalts einer Kugel. Denken 68
wir uns die ganze Oberfläche der Kugel in eine möglichst große Anzahl unter einander gleicher Flächenstückchen getheilt, die man aber ihrer Kleinheit wegen als eben betrachten kann (die Anzahl dieser Flächenstückchen sei mit n, die Oberfläche eines jeden sei mit o bezeichnet), so kann man jedes derselben als Basis einer Pyramide betrachten, deren Spitze in dem Mittelpunkte der Kugel liegt. Die Höhe einer solchen Pyramide ist dann natürlich gleich R, wenn wir mit R den Radius der Kugel bezeichnen; der Inhalt eines solchen Pyramidchen ist also

$$\frac{oR}{3}.$$

Der Inhalt der Kugel besteht aber aus n solcher Pyramidchen, da jedem der n Flächenstückchen, in welche wir uns die Kugeloberfläche getheilt dachten, ein solches im Mittelpunkte der Kugel gipfelndes Pyramidchen entspricht. Der Inhalt J der Kugel ist demnach

$$J = \frac{noR}{3},$$

da aber $n.o$ die Gesammtoberfläche der Kugel ist, so haben wir für $n.o$ zu setzen $4\pi R^2$ (§. 63), mithin haben wir für den Inhalt der Kugel

$$J = {}^4/_3\,\pi R^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder, wenn wir für π seinen Zahlenwerth bis auf vier Decimalstellen genau setzen,

$$J = 4{,}1887\,R^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

wofür man

$$J = 4{,}2\,R^3$$

setzen kann, wenn weniger Genauigkeit erforderlich ist.

Aufgaben.

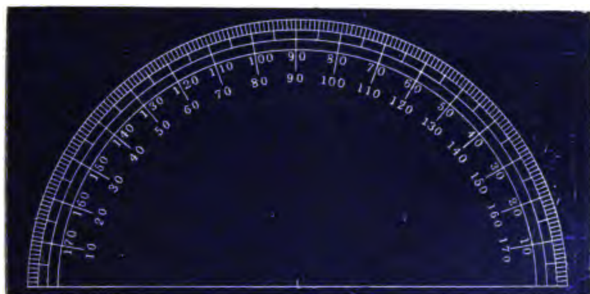
1. Wie groß ist der körperliche Inhalt der Kugeln, auf welche sich die Aufgaben in §. 63 beziehen?

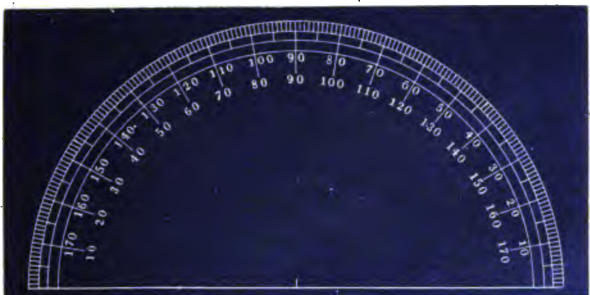
2. Der Körperinhalt einer Kugel ist 3 Kubikcentimeter, wie groß ist ihr Radius?

3. Wie viel Centimeter beträgt der Radius einer 6pfündigen und einer 12pfündigen Kanonenkugel? (Das specif. Gewicht des Gußeisens ist 7,2.)

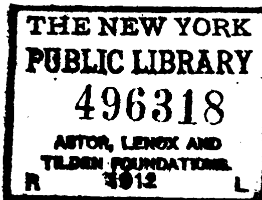
Alphabetisches Sachregister.


170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170


170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170


170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170


170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170



Holzschnitte
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Anfangsgründe

der

geometrischen Disciplinen

für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen,

sowie auch

zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

In drei Theilen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweiter Theil:

Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 5 9.

Elemente

der

ebenen und sphärischen Trigonometrie.



Für

Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

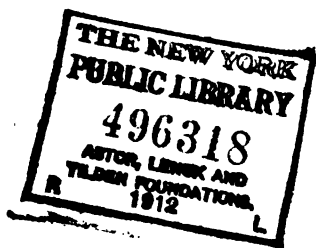
Mit 25 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1859.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
496318
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1912 L

Vorrede.

Ein gründliches Studium der Naturwissenschaften, namentlich aber der Physik, ist, wie wohl allgemein anerkannt wird, ohne mathematische Vorkenntnisse ganz unmöglich, und von mancher Seite her hört man deshalb auch den Mangel derselben bitter beklagen. Da nun aber doch die Mathematik fast auf allen höheren Schulanstalten Deutschlands einen wesentlichen Theil des Lectionsplanes bildet, so kann der verhältnißmäßig geringe Erfolg des mathematischen Unterrichtes kaum in etwas Anderem gesucht werden, als in der unzweckmäßigen Art, wie derselbe häufig ertheilt wird.

Der Vortrag der mathematischen Disciplinen wird nämlich vielfach allzu abstract gehalten, was die nachtheilige Folge hat, daß er nicht nur für die Naturwissenschaften vollkommen unfruchtbar bleibt, sondern daß er auch bei den Schülern eine meist schwer zu überwindende Abneigung gegen das mathematische Studium hervorruft.

Auffallender Weise treffen diese Vorwürfe vorzugsweise den geometrischen Unterricht, während Arithmetik und Algebra sich meist eines weit besseren Erfolges zu erfreuen haben.

Die mathematischen Vorkenntnisse, deren man für ein gedeihliches Studium der Physik bedarf, sind, wenn es sich nicht gerade um die schwierigsten Fragen handelt, weder sehr umfangreich noch schwer zugänglich. Es bedarf nur verhältnißmäßig weniger aber klar verstandener Sätze, welche durch genügende Uebung vollkommen geistiges Eigenthum geworden sind. Dadurch ist nun der Weg bezeichnet, welcher beim mathematischen Unterrichte befolgt werden muß, wenn er fruchtbringend für Wissenschaft und Leben werden soll. Es handelt sich darum, die für den logischen Zusammenhang, für das Fortschreiten in höheren mathematischen Disciplinen und für die practische Anwendung unentbehrlichen Wahrheiten möglichst klar und verständlich zu entwickeln und durch geeignete

Beispiele gut einzuüben. Nirgends wirkt eine Ueberladung an Material und ein Verlieren in Specialitäten nachtheiliger als beim mathematischen Unterrichte.

In diesem Sinne habe ich es versucht, die wichtigsten geometrischen Disciplinen zu bearbeiten, und zwar in drei Theilen, nämlich:

1. Die Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie;
2. Die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie;
3. Die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume;

welche zwar ein zusammengehöriges Ganzes bilden, von denen aber doch auch jeder einzelne Theil für sich bezogen werden kann.

Die beiden ersten Theile erscheinen gegenwärtig in zweiter Auflage. Die erste Auflage der ebenen Geometrie war im Jahre 1838, die erste Auflage der Trigonometrie war im Jahre 1839, freilich in etwas mangelhafter Ausstattung, zu Darmstadt erschienen. Die darin befolgte Methode hat sich bei dem geometrischen Unterrichte, welcher mir an der Realschule zu Gießen bis zu meiner Berufung nach Freiburg im Jahre 1844 übertragen war, vortrefflich bewährt, indem es mir namentlich gelang, den Schülern ein lebhaftes Interesse für den Gegenstand abzugewinnen und die erfreulichsten Fortschritte zu erzielen.

Es ist weder für ein weiteres Fortschreiten in der höheren Mathematik noch für praktische Anwendungen irgend einer Art genügend, daß man die geometrischen Wahrheiten einmal erkannt und verstanden hat; sie müssen durch erläuternde Beispiele, durch passende Uebungen zu einer lebendigen Anschauung erhoben werden, ohne welche eine freie Verwendung derselben für die Zwecke der Wissenschaft und des Lebens vollkommen unmöglich ist.

Während in dem vorliegenden Werkchen die Masse des Materials in dem oben angedeuteten Sinne auf das Nothwendigste beschränkt wurde, war ich bemüht, die vorgetragenen Lehren ausführlich genug zu entwickeln, um auch beim Selbstunterrichte zu einem vollkommen klaren Verständniß führen zu können, vorausgesetzt, daß der Leser alle Constructions- und Rechnungsbeispiele mit Sorgfalt und Genauigkeit ausführt.

Für eine lebendige Anschauung sind Constructionsaufgaben nach bestimmten Maaßen durchaus unentbehrlich, und deshalb habe ich sie auch in dem ganzen Werkchen von Anfang an durchgeführt. Nur durch solche Aufgaben wird es möglich, bei einem jeden Satze lange genug zu ver-

weilen, um ihn dem Gedächtniß gehörig einzuprägen und seine Bedeutung ins rechte Licht zu setzen. Gerade diese Constructionsaufgaben sind es auch, welche beim Unterrichte die rege Theilnahme des Schülers hervorrufen und dem Lehrer eine Controle darüber bieten, wie weit der Schüler in das Verständniß des fraglichen Satzes eingedrungen ist.

Beim Schulunterrichte müssen diese Aufgaben wenigstens theilweise nach einem größeren Maaßstabe auf der Tafel ausgeführt werden, wonach dann die übrigen dem häuslichen Fleiße überlassen bleiben können.

Ueber die einzelnen Theile bleiben nur noch wenige Bemerkungen zu machen übrig.

Ohne in Beziehung auf Tendenz und Methode etwas zu ändern, hat die zweite Auflage der Elemente der Geometrie namhafte Verbesserungen und eine wesentliche Ergänzung dadurch erfahren, daß die nothwendigsten Lehren der Stereometrie, welche in der ersten Auflage ganz fehlten, beigefügt wurden.

Ein besonderer Vorzug ist der neuen Auflage der Geometrie dadurch gesichert, daß die Figuren nicht allein ohne Vergleich besser und deutlicher, sondern auch weit zahlreicher sind, als in der ersten Auflage, was vorzugsweise daher rührt, daß ein großer Theil zum leichteren Verständniß wesentliche Figuren, welche in der ersten Auflage nur aus übergroßer Sparsamkeit weggeblieben waren, nun ihre Stelle gefunden haben.

Durch diese verbesserte Ausstattung, durch sorgfältige Ueberarbeitung des Textes und durch geeignete Ausfüllung mancher Lücken, welche bei der früheren Auflage lediglich dem mündlichen Unterrichte überlassen waren, hoffe ich das vorliegende Werkchen auch dem Selbstunterrichte zugänglich, so wie durch ein vollständiges Paragraphenregister und ein alphabetisches Inhaltsverzeichniß zur leichteren Orientirung und zum Nachschlagen geeigneter gemacht zu haben.

Zur Ausführung der Constructionsaufgaben ist ein Transporteur und ein Maaßstab nöthig. Um eine besondere Anschaffung derselben entbehrlich zu machen, sind den »Elementen der ebenen Geometrie« Abdrücke eines Transporteurs und einer Maaßstabstafel auf stärkerem Papier beigegeben worden.

Auch die Grundzüge der Trigonometrie erscheinen, wie schon bemerkt, in zweiter Auflage, zwar verbessert, aber ohne wesentliche Aenderung. Die trigonometrischen Functionen habe ich als Linien, als die Seiten rechtwinkeliger Dreiecke definirt, in welchen eine Seite der Längeneinheit gleich ist, weil diese Definition einfacher und anschaulicher

ist als die andere, nach welcher sie als Quotient zweier Dreiecksseiten bezeichnet werden. Die Linie ist ein geometrischer Begriff, der Quotient ist es nicht; deshalb glaubte ich die erstere Definition an die Spitze stellen, die letztere aber erst aus der Berechnung der Formeln rechtwinkeliger Dreiecke ableiten zu müssen.

Um dem Schüler nicht mit zwei Schwierigkeiten auf einmal entgegen zu treten, habe ich auch die Berechnung trigonometrischer Aufgaben im Anfang ohne Anwendung der Logarithmen durchgeführt und lasse die Benutzung der Logarithmen erst dann eintreten, wenn die Lehre von den trigonometrischen Functionen an und für sich klar und geläufig geworden ist. — Aus demselben Grunde habe ich auch die Formeln, welche zur Berechnung der fehlenden Stücke ebener und sphärischer Dreiecke dienen, erst vollständig aus der rein geometrischen Betrachtung entwickelt und erst später, ganz getrennt von dieser ersten Entwickelung, folgt die Umwandlung der Formeln, durch welche dieselben für logarithmische Rechnungen bequem gemacht werden.

Weil es im Anfang immerhin einige Schwierigkeiten hat, nach ebenen Figuren sich zu einer richtigen Anschauung räumlicher Verhältnisse zu erheben, habe ich der sphärischen Trigonometrie die Zeichnung der Netze beigefügt, aus welchen die den beiden Hauptfiguren dieser Abtheilung entsprechenden körperlichen Modelle leicht hergestellt werden können. Mit Hülfe dieser Modelle wird wohl das Verständniß der entsprechenden Entwickelungen keine Schwierigkeit mehr haben.

Der dritte Theil, die analytische Geometrie, erscheint zum ersten Male. Ich war bei Bearbeitung derselben bemüht, durch ausführlichere Besprechung concreter Fälle und durch Constructionsbeispiele nach gegebenen Zahlenwerthen die hier neu auftretenden Begriffe zugänglicher zu machen, als es gewöhnlich geschieht. Ich glaube namentlich auf diese Weise eine Brücke gebaut zu haben, welche den Leser über die Schwierigkeiten hinwegführt, die sich ihm meist beim Eintritt in das Studium der höheren geometrischen Disciplinen entgegenstellen.

Der analytischen Geometrie ist die Zeichnung des Netzes beigegeben, aus welchem man das körperliche Eck herstellen kann, welches durch die positiven Theile der drei Coordinatenebenen gebildet wird.

Freiburg, im Mai 1859.

J. Müller.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Die trigonometrischen Linien und ihre wichtigsten Beziehungen.

Zweites Kapitel.

Anwendung der trigonometrischen Functionen zur Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke.

Zweites Buch.

Sphärische Trigonometrie.

Anhang.

Erstes Buch.

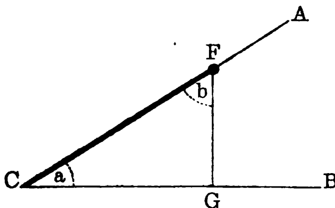
Ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Die trigonometrischen Linien und ihre wichtigsten Beziehungen.

Bestimmung von Sinus und Cosinus durch geometrische 1
Construction. Schneidet man auf dem einen Schenkel CA eines Winkels a, Fig. 1, ein Stück CF ab, welches der Längeneinheit gleich ist, so ist das von F auf den andern Schenkel CB des Winkels gefällte Perpendikel FG der Sinus des Winkels a. Die Entfernung des Scheitels C von dem Fußpunkt G dieses Perpendikels ist der Cosinus des Winkels a. Sollen Sinus und Cosinus eines Winkels durch Zahlen ausgedrückt werden, so muß man sie mit derselben Längeneinheit messen, welche man zur Construction des Sinus und Cosinus als Längeneinheit angenommen hatte.

Fig. 1.



Es sei z. B. *sin.* 35° durch Construction zu bestimmen, so schneide man vom Scheitel an ein Stück CF ab, welches einem zehntheiligen (etwa badischen) Zoll gleich ist; das von F auf den andern Schenkel gefällte Perpendikel wird in diesem Falle 5,7‴ oder 0,57″ sein, es wäre demnach

$$sin.\ 35^0 = 0{,}57.$$

Bei der zu dieser Construction gewählten Einheit kann man den Sinus sowohl wie den Cosinus nur bis auf $^1/_{100}$ genau finden, weil man mit Hülfe des Zirkels und des tausendtheiligen Maaßstabes doch nur bis auf $^1/_{10}$ Linie, also bis auf $^1/_{100}$ der gewählten Längeneinheit genau messen kann.

Hätte man das Decimeter zur Längeneinheit gewählt, so hätte man bei gehöriger Sorgfalt den Sinus und Cosinus bis auf drei Decimalstellen genau finden können; es hätte sich ergeben

$$sin.\ 35^0 = 0{,}573$$

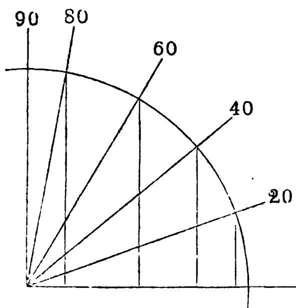
und

$$cos.\ 35^0 = 0{,}819.$$

Für die meisten Fälle reicht aber diese Genauigkeit nicht hin. Wir werden weiter unten Mittel kennen lernen, Sinus und Cosinus durch Rechnung ungleich genauer zu bestimmen, als es durch Zeichnung möglich ist.

Um den Begriff von Sinus und Cosinus besser einzuüben, construire man, das Decimeter zur Einheit nehmend, die Sinus und Cosinus von 5°, 10°, 15°, 20° u. s. w. aller Winkel von 5 zu 5 Grad bis zu 90°, und stelle die so gefundenen Werthe in eine Tabelle zusammen. Man kann diese Construction für alle Winkel an einer und derselben Figur ausführen, wie es, den Zoll zur Einheit nehmend, in Fig. 2 für die Winkel 20, 40, 60 und 80 Grad geschehen ist.

Fig. 2.



2 **Tafeln der Sinus und Cosinus.** Bezeichnen wir in Fig. 1 den Winkel CFG durch b, so ist, nach der obigen Definition von Sinus und Cosinus eines Winkels, CG der Sinus und FG der Cosinus des Winkels b. CG ist also zugleich der Sinus von b und der Cosinus von a, FG ist gleichzeitig der Sinus von a und der Cosinus von b, oder in Zeichen

$$sin.\,\mathrm{a} = cos.\,\mathrm{b}$$
$$cos.\,\mathrm{a} = sin.\,\mathrm{b}.$$

Der Winkel b ist aber offenbar $90^0 - \mathrm{a}$, oder $R - \mathrm{a}$, wenn durch R der rechte Winkel bezeichnet wird; es ist demnach

$$sin.\,\mathrm{a} = cos.\ (R - \mathrm{a})$$
$$cos.\,\mathrm{a} = sin.\ (R - \mathrm{a}).$$

So ist z. B. $sin.\ 15^0 = cos.\ 75^0$, $cos.\ 15^0 = sin.\ 75^0$; $sin.\ 40^0 = cos.\ 50^0$; $sin.\ 45^0 = cos.\ 45^0$ u. s. w.

Sind demnach die Sinus und Cosinus aller Winkel von 0° bis 45°

bekannt, so kennt man dadurch zugleich auch die Sinus und Cosinus aller Winkel von 45° bis 90°. Die Tafeln, in welchen man die numerischen Werthe von Sinus und Cosinus zusammengestellt hat, gehen deshalb auch nur bis zu 45°. Ihre Einrichtung ist aus beistehender Tafel ersichtlich, welche die Sinus und Cosinus der Winkel von 5 zu 5 Grad enthält. Die erste Columne dieser kleinen Tafel enthält die Gradzahl der von 5° zu 5° fortschreitenden Winkel von 0° bis 45°, die zweite die Sinus, die dritte die Cosinus der entsprechenden Winkel bis auf drei Decimalstellen:

	sin.	*cos.*	
0	0,000	1,000	90
5	0,087	0,996	85
10	0,174	0,985	80
15	0,259	0,966	75
20	0,342	0,940	70
25	0,423	0,906	65
30	0,500	0,866	60
35	0,573	0,819	55
40	0,643	0,766	50
45	0,707	0,707	45
	cos.	*sin.*	

über der zweiten steht deshalb *sin.*, über der dritten *cos.* Die vierte Columne enthält diejenige Gradzahl, welche die in gleicher Höhe in der ersten Columne stehende zu 90° ergänzt; diese letzte Columne enthält demnach von unten nach oben, von 5 zu 5 Grad wachsend, die Gradzahl der Winkel von 45 bis 90 Grad. In derselben Ordnung enthält die dritte Columne, unter welcher *sin.* steht, die Sinus der Winkel von 45° bis 90°. Die Cosinus der Winkel von 45° bis 90° finden sich in der zweiten Columne, unter welcher *cos.* steht, und zwar ist jede Zahl dieser Columne der Cosinus des Winkels, welcher in derselben Horizontalreihe und in der letzten Columne steht.

Nach dieser Erklärung wird es leicht sein, in obiger Tafel *sin.* 40°, *cos.* 15°, *cos.* 65°, *sin.* 80° u. s. w. aufzusuchen.

Große Tafeln haben eine ganz ähnliche Einrichtung, nur folgen die

Winkel von 10 Minuten zu 10 Minuten, oder von Minute zu Minute u. s. w. auf einander.

Bei größeren Rechnungen ist es sehr vortheilhaft, gleich den Logarithmen jedes Sinus und Cosinus aufschlagen zu können, deshalb hat man Tafeln entworfen, welche die Logarithmen der Sinus und Cosinus enthalten. Um den Anfänger aber nicht gleich mit doppelten Schwierigkeiten zu überhäufen, ist es besser, anfangs die logarithmische Rechnung noch zu vermeiden, und nur solche Tafeln anzuwenden, in denen man den Sinus und den Cosinus der Winkel selbst, und nicht ihre Logarithmen findet. Weil jedoch die am meisten verbreiteten Vega'schen Tafeln nur die Logarithmen der Sinus und Cosinus enthalten, so ist am Schlusse dieses Buches eine Tafel beigefügt, welche die Sinus und Cosinus der Winkel von 10′ zu 10′ enthält.

3 **Interpolation.** Man sieht aus den Tafeln sowohl als auch aus der Zeichnung, daß der Sinus mit dem Winkel von 0° bis 90° wächst, und zwar wächst der Sinus von 0 bis 1, während der Winkel von 0° bis 90° wächst. Der Wachsthum des Sinus ist aber nicht dem Wachsthum des Winkels proportional. Wenn ein kleiner Winkel um einen beliebigen Winkel *s* wächst, so ist der entsprechende Wachsthum des Sinus größer, als wenn ein größerer Winkel ebenfalls um *s* zunimmt. Wächst z. B. der Winkel von 5° um 10°, so ist der entsprechende Wachsthum des Sinus größer, als die Zunahme des Sinus, wenn man einen Winkel von 75° um 10° wachsen läßt; oder mit anderen Worten, obgleich die Differenz der Winkel 15° und 5° gleich ist der Differenz der Winkel 85° und 75°, so ist doch die Differenz $sin. 15° - sin. 5°$ größer als die Differenz $sin. 85° - sin. 75°$.

Beim Cosinus ist es umgekehrt. Der Cosinus von 0° ist 1, der Cosinus von 90° ist 0; während der Winkel von 0° bis 90° wächst, nimmt der Cosinus von 1 bis 0 ab; diese Abnahme ist aber nicht der Zunahme des Winkels proportional, sie ist für kleine Winkel am langsamsten; je größer die Winkel werden, desto rascher nehmen ihre Cosinus ab.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß streng genommen die Differenz zweier in den Tafeln auf einander folgender Sinus fortwährend um so mehr abnehmen müsse, je mehr man sich 90° nähert. Betrachtet man drei auf einander folgende Sinus der Tafeln, so müßte streng genommen die Differenz des letzten und des mittleren kleiner sein, als die Differenz des mittleren und des ersten. Der Unterschied zweier auf einander fol-

gender Sinusdifferenzen fällt aber meistens auf solche Decimalstellen, die nicht mehr berücksichtigt werden. So sind z. B. auf sechs Decimalstellen genau drei auf einander folgende Sinus unserer Tafel: *sin.* 7° = 0,121870; *sin.* 7° 10′ = 0,124756, *sin.* 7° 20′ = 0,127642. Die Differenz des mittleren dieser drei Sinus und des vorhergehenden ist 0,002886; eben so groß ist aber auch die Differenz des mittleren und des letzteren. Hier finden wir also zwei auf einander folgende Differenzen gleich, obgleich sie es streng genommen nicht sein können. In der That hätte man die Sinus von 7°, 7° 10′, 7° 20′ auf zehn Decimalstellen genau bestimmt, so würde man die fraglichen Differenzen nicht mehr gleich gefunden haben.

Daraus folgt nun, daß, wenn man nur sechs Decimalstellen berücksichtigt, ohne merklichen Fehler angenommen werden kann, daß innerhalb zweier um 10′ von einander verschiedener Winkelgränzen der Wachsthum des Sinus dem Wachsthum des Winkels proportional ist. Da *sin.* 7° um 0,002886 wächst, wenn der Winkel um 10′ zunimmt, so wird er um 0,002886 × 1/10, oder um 0,0002886 zunehmen, wenn der Winkel von 7° um 1′ zunimmt. Demnach ist

$$sin.\ 7^{\circ}\,1' = 0{,}121870 + 0{,}0002886 = 0{,}1221586.$$

Ferner ist *sin.* 7° 2′ = 0,121870 + 0,002886 × 2/10 u. s. w.

Nach diesem Princip kann man den Sinus eines jeden Winkels bestimmen, welcher zwischen zwei auf einander folgenden Winkeln der Tafel liegt. Ein solches Verfahren, Zwischenwerthe zu berechnen, heißt **Interpolation**.

Durch eine ganz ähnliche Interpolation kann man auch den Cosinus solcher Winkel finden, die zwischen zwei auf einander folgenden Winkeln der Tafel liegen, nur darf dabei nicht übersehen werden, daß der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst.

Umgekehrt kann man auch durch Interpolation den Winkel bestimmen, der zu einem Sinus oder Cosinus gehört, der nicht unmittelbar in den Tafeln steht, sondern zwischen zwei auf einander folgenden Sinus oder Cosinus der Tafel liegt. Es sei z. B. der Winkel zu suchen, dessen Sinus 0,866324 ist. Der nächst kleinere Tafelsinus ist 0,866025 und dieser gehört einem Winkel von 60° an. Der nächst größere Tafelsinus ist *sin.* 60° 10′ = 0,867476; also die Differenz des nächst kleineren und des nächst größeren Sinus der Tafel ist 0,001451; unser Sinus ist aber nur um 0,000299 größer als der Sinus von 60°, also ist der

fragliche Winkel um eine Anzahl n Minuten größer als 60°, die sich zu 10 verhält wie 0,000299 zu 0,001451, also

$$n : 10 = 299 : 1451,$$

woraus folgt $n = 2'$, ... Der Winkel also, welcher zu dem Sinus 0,866324 gehört, ist 60° 2'. Zur bequemeren Interpolation findet man häufig in den Tafeln die Differenzen der auf einander folgenden Sinus und Cosinus in einer besonderen Columne beigefügt, so daß man nicht erst nöthig hat, die Differenzen durch Subtraction zu suchen.

Es wird gut sein, wenn der Schüler nicht eher weiter geht, als bis er mit Leichtigkeit zu jedem beliebigen Winkel den Sinus und Cosinus, und zu jedem gegebenen Sinus oder Cosinus den Winkel mittelst der Tafeln durch Interpolation suchen kann.

4 **Die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus.** Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels bilden die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich 1 ist; daraus folgt

$$(\sin. a)^2 + (\cos. a)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und also

$$(\sin. a)^2 = 1 - (\cos. a)^2$$
$$\sin. a = \sqrt{1 - (\cos. a)^2}$$

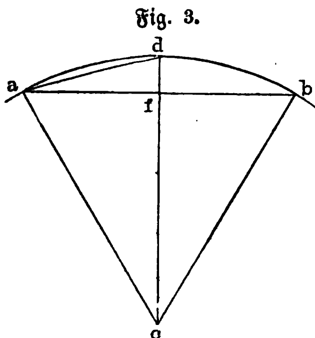
und ebenso

$$(\cos. a)^2 = 1 - (\sin. a)^2$$
$$\cos. a = \sqrt{1 - (\sin. a)^2}.$$

Ist demnach der Sinus eines Winkels bekannt, so kann man seinen Cosinus, und ist der Cosinus bekannt, seinen Sinus berechnen.

5 **Berechnung der Sinus und Cosinus von 30°, 45° und 60°.** In Fig. 3 sei $\measuredangle acb = 60°$, also ab die Seite eines regelmäßigen Sechsecks. In dem rechtwinkeligen Dreieck acf ist offenbar $\measuredangle acf = 30°$, und wenn $ac = 1$, so ist $af = \sin. 30°$. Wenn aber $ac = 1$, so ist auch $ab = 1$, und $af = 0,5$; es ist also

Fig. 3.



$$\sin. 30° = 0,5$$

und

$$\cos. 30° = \sqrt{1 - 0,25} = \sqrt{0,75}$$
$$= 0,866025.$$

Nun aber ist $\sin. 30° = \cos. 60°$ und $\cos. 30° = \sin. 60°$, mithin hat man

$$sin.\ 60^0 = 0{,}866025$$
$$cos.\ 60^0 = 0{,}5.$$

Der Sinus und der Cosinus eines Winkels von 45^0 sind einander gleich, denn wie wir oben gesehen haben, ist $sin.\ 45^0 = cos.\ (90^0 - 45^0) = cos.\ 45^0$. Nun aber ist

$$(sin.\ 45^0)^2 + (cos.\ 45^0)^2 = 1$$

folglich auch

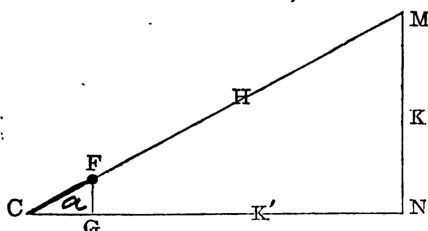
$$(sin.\ 45^0)^2 + (sin.\ 45^0)^2 = 1$$

oder

$$2\ (sin.\ 45^0)^2 = 1;\ (sin.\ 45^0)^2 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5$$
$$sin.\ 45^0 = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707107.$$

Berechnung der Katheten rechtwinkeliger Dreiecke. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse und die Winkel bekannt sind, so kann man mit Hülfe der Sinus und Cosinus der gegebenen Winkel die beiden Katheten berechnen. In dem rechtwinkeligen Dreieck Fig. 4 sei die Hypotenuse CM mit H, die eine Kathete MN mit K, die andere CN mit K' und der der Seite K gegenüberliegende Winkel MCN mit a bezeichnet. Denkt man sich auf der Hypotenuse H einen Punkt F bezeichnet, welcher von der Spitze des Winkels a um die Längeneinheit entfernt ist, so ist das von F auf K' gefällte Perpendikel FG der Sinus und CG der Cosinus des Winkels a. Nach der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke ist demnach 6

Fig. 4.



$$1 : sin.\,a = H : K.$$

Aus dieser Gleichung zieht man

$$K = H\ sin.\,a \quad . . . . (2)$$

oder in Worten: man erhält eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die Hypotenuse mit dem Sinus des Winkels multiplicirt, welcher der gesuchten Seite gegenüberliegt.

Für $H = 10000$, $a = 30^0$, ist $K = 10000 . sin. 30^0 = 10000 . 0{,}5 = 5000$.

Wenn $H = 524$, $a = 64^0$, so ist

$$K = 524 . sin. 64^0 = 524 . 0{,}898794.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, Fig. 4, folgt aber auch

$$1 : cos.\,\mathrm{a} = H : K'$$

also

$$K' = H\ cos.\,\mathrm{a} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

d. h. in Worten: man findet eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die Hypotenuse mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die gesuchte Kathete mit der Hypotenuse bildet.

Wenn in Fig. 4 $H = 632$, $\mathrm{a} = 27^0$, so ist $K' = 632\,.\,cos.\,27^0 = 632\,.\,0{,}891007$.

Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse 628′ und einer der beiden spitzen Winkel 19° ist, so ist diejenige Kathete dieses Dreiecks, welche dem Winkel von 19° gegenüberliegt, 628 *sin.* 19°, die andere Kathete ist 628 *cos.* 19°.

In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse 6834′, der eine Winkel 23° 35′; wie groß sind die beiden Katheten?

In einem andern rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse 0,732, der eine Winkel 78° 15′; wie groß sind die Katheten?

Um das bisher Gesagte noch mehr einzuüben, mag folgendes Beispiel dienen. Die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks Fig. 5 sei mit C, die Katheten mit B und A bezeichnet, die Winkel aber mit denjenigen griechischen Buchstaben, welche den Buchstaben der gegenüberliegenden Seiten entsprechen, so hat man

Fig. 5.

$$B = C\ sin.\,\beta$$
$$A = C\ cos.\,\beta.$$

Fällt man von der Spitze des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so ist dieses offenbar

$$p = A\ sin.\,\beta.$$

Setzt man den für A gefundenen Werth in diese Gleichung, so kommt

$$p = C\ cos.\,\beta\ sin.\,\beta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\mathrm{I})$$

Es ist aber auch

$$p = B\ sin.\,\alpha.$$

Substituirt man hier den oben für B gefundenen Werth, so kommt

$$p = C\ sin.\,\beta\ sin.\,\alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\mathrm{II})$$

Dieser Werth ist aber offenbar mit dem bei (I) identisch, denn $sin.\,\alpha = cos.\,\beta$, weil die Winkel β und α sich zu 90° ergänzen.

Durch das Perpendikel wird die Hypotenuse in zwei Theile a und b getheilt, und es ist:

$$b = B \cos. \alpha = B \sin. \beta$$

substituirt man für B seinen obigen Werth, so kommt:

$$b = C (\sin. \beta)^2$$

ferner ist

$$a = A \cos. \beta$$

und wenn man für A seinen obigen Werth setzt

$$a = C (\cos. \beta)^2.$$

Es sei in objgem Dreieck $C = 839$, der Winkel $\beta = 34^0$; wie groß ist B, A, p, a und b? Wie groß sind diese Stücke, wenn $C = 1$ und $\beta = 67^0$ ist?

Der Radius eines Kreises sei 4^{cm}, wie groß ist die Seite eines in diesen Kreis beschriebenen Fünfecks? Wie groß ist das aus dem Mittelpunkt auf die Fünfeckseite gefällte Perpendikel?

Der Mittelpunktswinkel in einem Fünfeck ist 72^0, und demnach die halbe Fünfeckseite $4 \times \sin. \frac{72^0}{2}$ oder $4 \sin. 36^0 = 4 \times 0{,}587785$, das Perpendikel aber ist $4 \cos. 36^0 = 4 \,.\, 0{,}809017$.

Der Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen n Ecks ist $\frac{360^0}{n}$; daraus ergiebt sich die halbe Seite eines regelmäßigen n Ecks, welches in einen Kreis vom Radius r beschrieben ist: $r \,.\, \sin. \frac{360^0}{2n}$; das auf eine Seite des n Ecks gefällte Perpendikel ist aber $r \,.\, \cos. \frac{360^0}{2n}$.

Berechnung der Hypotenuse. Wir haben oben Gleichung (2) 7
gesehen, daß $K = H \sin. a$, daraus folgt aber

$$H = \frac{K}{\sin. a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

das heißt in Worten: man findet die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die eine Kathete durch den Sinus des Winkels dividirt, welcher ihr gegenüberliegt.

Es sei z. B. die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks 324, der ihr gegenüberliegende Winkel 62^0; wie groß ist die Hypotenuse?

Wir haben aber oben, Gleichung (3), auch gefunden, daß

$$K' = H \cos. a$$

daraus folgt

$$H = \frac{K'}{cos.\, a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

d. h. in Worten: man findet die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man eine Kathete durch den Cosinus des Winkels dividirt, welchen diese Kathete mit der Hypotenuse einschließt.

Es sei z. B. die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks 27′, der Winkel, den sie mit der Hypotenuse bildet, sei 38°; wie groß ist die Hypotenuse?

Faßt man die beiden eben gegebenen Regeln zusammen, so kann man sie so ausdrücken: Man findet die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man eine Kathete mit dem Sinus des gegenüberliegenden, oder mit dem Cosinus des anliegenden Winkels dividirt. Natürlich findet man jedesmal dasselbe Resultat, weil ja der Sinus des gegenüberstehenden Winkels dem Cosinus des anliegenden gleich ist (§. 2).

8 **Berechnung der Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks.** Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt auch

$$sin.\, a = \frac{K}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und

$$cos.\, a = \frac{K'}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

das heißt in Worten: wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die drei Seiten bekannt sind, so findet man den Sinus eines der spitzen Winkel, wenn man mit der Hypotenuse in die Kathete dividirt, welche dem fraglichen Winkel gegenüberliegt; den Cosinus eines der beiden spitzen Winkel findet man aber, wenn man mit der Hypotenuse in die anliegende Kathete dividirt.

Es seien z. B. die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks 3 und 4, so ist bekanntlich die Hypotenuse 5. Der Sinus des Winkels a, welcher der Kathete 3 gegenüberliegt, ist $^3/_5$; der Cosinus dieses Winkels ist $^4/_5$. Es ist aber $^4/_5$ zugleich der Sinus des Winkels b, welcher der Seite 4 gegenüberliegt, und $^3/_5$ der Cosinus dieses Winkels.

Da nun der Sinus und Cosinus der beiden spitzen Winkel bekannt sind, so findet man leicht die entsprechenden Winkel selbst mit Hülfe der Tafeln. Es ist

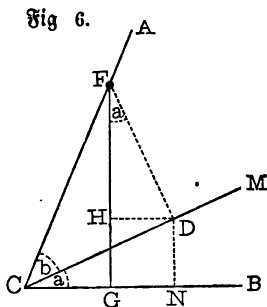
$$sin.\, a = {}^3/_5 = 0{,}6.$$

Der nächst kleinere Sinus, welcher sich in den hinten angehängten Tafeln findet, ist 0,599489 und dieser gehört einem Winkel von 36° 50′ an. Der nächst größere ist 0,601815 und dieser gehört einem Winkel von 37° an. Der gesuchte Winkel liegt also zwischen 36° 50′ und 37°. Nach dem in §. 3 angegebenen Verfahren kann der Winkel genau bestimmt werden.

Es sei 15 die Hypotenuse, 4 die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ist $^4/_{15}$ der Sinus des Winkels, welcher der Kathete 4 gegenüberliegt, und der Cosinus des Winkels, welchen diese Kathete mit der Hypotenuse bildet. Es ist $^4/_{15} = 0{,}26666 \ldots$ wie groß sind demnach die beiden spitzen Winkel des fraglichen Dreiecks?

Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel. Wenn Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b bekannt sind, so kann man den Sinus und den Cosinus der Winkel (a + b) und (a — b) berechnen, und zwar mit Hülfe einiger Formeln, die sogleich entwickelt werden sollen. 9

In Fig. 6 sind die Winkel a und b so zusammengestellt, daß sie einen Schenkel *CM* und den Scheitel gemeinschaftlich haben, und daß die



Schenkel *CA* und *CB* einen Winkel mit einander machen, welcher der Summe der Winkel a und b gleich ist. Bezeichnet man auf dem Schenkel *CA* des Winkels b, welcher den beiden Winkeln a und b nicht gemeinschaftlich ist, einen Punkt *F* so, daß $CF = 1$, so ist das von *F* auf *CB* gefällte Perpendikel

$$FG = \sin.\ (a + b).$$

Ferner ist das von *F* auf den den Winkeln a und b gemeinschaftlichen Schenkel gefällte Perpendikel

$$DF = \sin.\, b$$

und also auch

$$CG = \cos.\ (a + b)$$
$$CD = \cos.\, b.$$

Fällt man nun von *D* das Perpendikel *DH* auf *FG*, so wird dadurch *FG* in zwei Theile getheilt, und es ist

$$\sin.\ (a + b) = GH + HF.$$

Es kommt nun darauf an, die beiden Stücke *GH* und *HF* zu

berechnen. Es ist offenbar $HG = DN$; DN aber ist die eine Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks CDN, folglich ist $DN = CD \,.\, sin.\, \mathrm{a}$ (§. 6); da aber $CD = cos.\, \mathrm{b}$, so ist

$$GH = DN = cos.\, \mathrm{b}\ sin.\, \mathrm{a}.$$

Der Winkel HFD ist aber gleich dem Winkel a (Geometrie §. 8), folglich ist $FH = FD \,.\, cos.\, \mathrm{a}$; setzt man für DF seinen Werth $sin.\, \mathrm{b}$, so kommt

$$HF = sin.\, \mathrm{b}\ cos.\, \mathrm{a}.$$

Setzt man nun endlich die gefundenen Werthe von HF und HG in den Werth von $sin.\, (\mathrm{a} + \mathrm{b})$, so kommt

$$sin.\, (\mathrm{a} + \mathrm{b}) = sin.\, \mathrm{a}\ cos.\, \mathrm{b} + sin.\, \mathrm{b}\ cos.\, \mathrm{a} \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Wir wollen diese Formel anwenden, um $sin.\ 75^0$ zu berechnen; $75^0 = 45^0 + 30^0$, mithin ist $sin.\ 75^0 = sin.\ 45^0 \times cos.\ 30^0 + sin.\ 30^0 \times cos.\ 45$, und wenn man für $sin.\ 45^0$, $cos.\ 45^0$, $sin.\ 30^0$ und $cos.\ 30^0$ die oben in §. 5 schon berechneten Werthe setzt,

$sin.\ 75^0 = 0{,}707107 \times 0{,}866025 + 0{,}5 \times 0{,}707107 = 0{,}965926.$

Aus derselben Figur läßt sich auch ein Werth für $cos.\, (\mathrm{a} + \mathrm{b})$ ableiten.

$$CG = cos.\, (\mathrm{a} + \mathrm{b}) = CN - GN.$$

Aus dem Dreieck CDN ergiebt sich

$$GN = CD \,.\, cos.\, \mathrm{a} = cos.\, \mathrm{b} \,.\, cos.\, \mathrm{a}.$$

Es ist aber ferner

$$GN = HD = FD \,.\, sin.\, \mathrm{a} = sin.\, \mathrm{b} \,.\, sin.\, \mathrm{a}.$$

Setzt man diese Werthe von CN und GN in den Werth von $cos.\, (\mathrm{a} + \mathrm{b})$, so kommt:

$$cos.\, (\mathrm{a} + \mathrm{b}) = cos.\, \mathrm{a}\ cos.\, \mathrm{b} - sin.\, \mathrm{a}\ sin.\, \mathrm{b} \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

nach dieser Formel ist also

$$cos.\ 75^0 = cos.\ 45^0\ cos.\ 30^0 - sin.\ 45^0\ sin.\ 30^0.$$

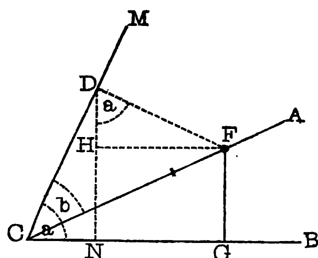
Der Schüler führe diese Rechnung aus und vergleiche das Resultat mit dem in der angehängten Tafel stehenden Werth von $cos.\ 75^0$.

10 **Sinus und Cosinus der Differenz zweier Winkel.** Auf ähnliche Weise läßt sich auch $sin.\, (\mathrm{a} - \mathrm{b})$ und $cos.\, (\mathrm{a} - \mathrm{b})$ bestimmen. Es sei in Fig. 7 $\measuredangle MCB = \mathrm{a}$, $\measuredangle MCA = \mathrm{b}$, so ist $\measuredangle ACB = \mathrm{a} - \mathrm{b}$. Der Schenkel MC ist den beiden Winkeln a und b gemeinschaftlich. Bezeichnet man auf dem Schenkel CA des Winkels b, welcher den Winkeln a und b nicht gemeinschaftlich ist, einen Punkt F, so daß $FC = 1$, so ist das Perpendikel

$$FG = \sin.(a - b)$$
$$CG = \cos.(a - b)$$
$$FD = \sin. b$$
$$CD = \cos. b.$$

Fällt man ferner von F ein Perpendikel FH auf DN, so hat man

Fig. 7.



$$FG = HN = DN - DH\ . \quad \text{(I)}$$

Da aber

$$DN = CD . \sin. a = \cos. b . \sin. a$$

und

$$DH = DF . \cos. a = \sin. b . \cos. a,$$

so ist endlich, wenn man für FG, DN und DH ihre Werthe in (I) setzt,

$$\sin.(a - b) = \sin. a . \cos. b - \cos. a \sin. b \quad (10)$$

Nach dieser Formel ist

$$\sin. 15^0 = \sin. (45^0 - 30^0) = \sin. 45^0 . \cos. 30^0 - \sin. 30^0 \cos. 45^0.$$

Man setze hier für $\sin. 45^0$, $\cos. 45^0$, $\sin. 30^0$ und $\cos. 30^0$ die oben gefundenen Werthe und führe die Rechnung aus, so wird man einen mit den Tafeln übereinstimmenden Werth finden.

Nun wollen wir zu der Berechnung von $\cos. (a - b)$ übergehen. In Fig. 7 ist

$$\cos. (a - b) = CG = CN + NG$$

es ist aber

$$CN = CD \cos. a = \cos. b \cos. a$$

und

$$NG = FH = DF \sin. a = \sin. b \sin. a$$

also

$$\cos. (a - b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \ . \ . \ . \ . \quad (11)$$

Nach dieser Formel ist

$$\cos. 15^0 = \cos. 45^0 . \cos. 30^0 + \sin. 45^0 . \sin. 30^0.$$

Die Rechnung ist auszuführen.

Entwickelung weiterer Formeln. I. Setzt man in Gleichung (8) $b = a$, so kommt 11

$$\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (12)$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus Gleichung (9)

$$\cos. 2a = (\cos. a)^2 - (\sin. a)^2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (13)$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung für $cos.\,a^2$ seinen Werth, $1 - (sin.\,a)^2$, so kommt

$$cos.\ 2a = 1 - 2\ (sin.\,a)^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (14)$$

und wenn man in Gleichung (13) für $(sin.\,a)^2$ seinen Werth $1 - (cos.\,a)^2$ setzt,

$$cos.\ 2a = 2\ (cos.\,a)^2 - 1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (15)$$

II. Summirt man Gleichung (8) und Gleichung (10), so kommt

$$sin.\ (a + b) + sin.\ (a - b) = 2\ sin.\,a\,.\,cos.\,b \qquad (a)$$

Zieht man Gleichung (10) von Gleichung (8) ab, so kommt

$$sin.\ (a + b) - sin.\ (a - b) = 2\ cos.\,a\,.\,sin.\,b \qquad (b)$$

Setzt man in diesen Gleichungen $a + b = m$ und $a - b = n$, so ist $a = \frac{m + n}{2}$ und $b = \frac{m - n}{2}$, und wenn man diese Werthe von a und b in die Gleichungen (a) und (b) substituirt, so erhält man

$$sin.\ m + sin.\ n = 2\ sin.\ \frac{m + n}{2}\,.\,cos.\ \frac{m - n}{2} \quad . \quad (16)$$

$$sin.\ m - sin.\ n = 2\ cos.\ \frac{m + n}{2}\,.\,sin.\ \frac{m - n}{2} \quad . \quad (17)$$

III. Summirt man die Gleichungen (9) und (11), so kommt

$$cos.\ (a + b) + cos.\ (a - b) = 2\,.\,cos.\,a\,.\,cos.\,b$$

und wenn man für a und b ihre Werthe $\frac{m + n}{2}$ und $\frac{m - n}{2}$ setzt,

$$cos.\ m + cos.\ n = 2\,cos.\ \frac{m + n}{2}\,.\,cos\ \frac{m - n}{2} \quad . \quad (18)$$

Zieht man dagegen die Gleichung (9) von Gleichung (11) ab, so kommt

$$cos.\ (a - b) - cos.\ (a + b) = 2\,sin.\,a\,.\,sin.\,b$$

und wenn man für a und b ihre obigen Werthe setzt,

$$cos.\ n - cos.\ m = 2\ sin.\ \frac{m + n}{2}\,.\,sin.\ \frac{m - n}{2}\,.$$

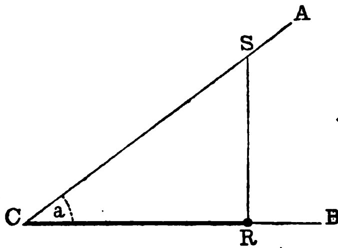
12 **Construction der Tangente.** Bezeichnet man auf dem einen Schenkel CB eines Winkels a, Fig. 8, einen Punkt R, der um die Längeneinheit vom Scheitel C entfernt ist; errichtet man alsdann in R ein Perpendikel, so heißt das zwischen beide Schenkel fallende Stück RS dieses Perpendikels Tangente des Winkels a.

Zur Uebung construire man *tang.* 10°, *tang.* 19°, *tang.* 36°, *tang.* 45°, *tang.* 54° u. s. w.

Wenn der Winkel 0 ist, so ist seine Tangente ebenfalls 0; mit

wachsendem Winkel wächst auch die Tangente; sie wird $= 1$ für $a = 45^0$, denn in diesem Fall ist in Fig. 8 jeder der beiden spitzen Winkel des Dreiecks CRS gleich 45^0, das Dreieck selbst muß also ein gleichschenkeliges sein, folglich ist für diesen Fall $CR = RS = 1$. Wächst a über 45^0 hinaus, so wächst *tang.* a fortwährend, bis endlich für einen rechten Winkel die Tangente unendlich wird; denn wenn a ein rechter Winkel ist, so läuft der Schenkel CA mit dem in R errichteten Perpendikel parallel, das in R errichtete Perpendikel kann mithin niemals diesen Schenkel durchschneiden. Das in R errichtete Perpendikel ist durch diesen Schenkel nicht begränzt, oder mit anderen Worten, es ist unendlich.

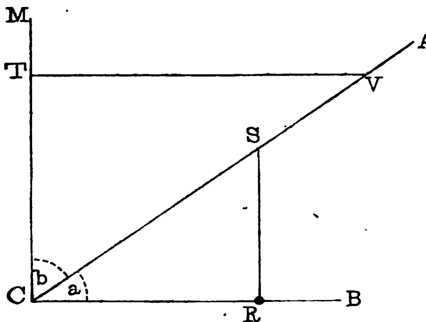
Fig. 8.



Die Tangente wächst nicht in demselben Verhältniß wie der Winkel. Wenn der Winkel von 0^0 an wächst, wächst die Tangente anfangs langsam; dann schneller und schneller, je mehr sich der Winkel einem rechten nähert. Dies kann man mit anderen Worten auch so ausdrücken: wenn man irgend einen Winkel a um einen Winkel b wachsen läßt, so ist der entsprechende Wachsthum der Tangente um so größer, je näher a einem rechten Winkel ist. Läßt man z. B. einen Winkel von 70^0 um 10^0 wachsen, so ist der entsprechende Wachsthum der Tangente größer, als wenn man einen Winkel von 20^0 um 10^0 wachsen ließe.

Construction der Cotangente. Errichtet man im Scheitel C des 13
Winkels a, Fig. 9, ein Perpendikel auf dem Schenkel CB, so ist der dadurch entstehende Winkel b der Ergänzungswinkel von a, also $a + b = 90^0$. Macht man auf diesem Perpendikel $CT = 1$, zieht man dann durch T eine Linie parallel mit CB, so ist das Stück TV derselben die Tangente des Winkels b. Die Tangente des Ergänzungswinkels b führt aber auch den Namen Cotangente von a, es ist also

Fig. 9.



$$cotang.\,a = tang.\,(R - a).$$

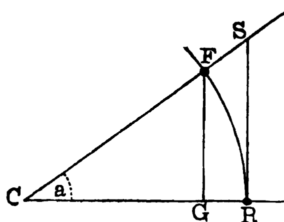
So ist z. B. $tang.\ 30^0 = cotang.\ 60^0$, $tang.\ 18^0 = cotang.\ 72^0$ u. s. w. Es reicht deshalb hin, in den Tafeln die Tangenten und Cotangenten der Winkel von 0^0 bis 45^0 einzutragen. In Beziehung auf die Tangenten und Cotangenten ist die Einrichtung der Tafeln dieselbe, die wir oben für Sinus und Cosinus kennen gelernt haben, es ist deshalb hier keine weitere Erläuterung nöthig.

Die Cotangente eines Winkels von 0^0 ist unendlich; mit wachsendem Winkel nimmt sie anfangs rasch, dann aber um so langsamer ab, je mehr der Winkel sich 90^0 nähert, für 90^0 endlich wird sie zu Null.

14 **Relation zwischen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente.**

In Fig. 10 sei $CR = CF = 1$, FG und RS rechtwinkelig auf CR, so ist $CG = cos.\,a$, $FG = sin.\,a$, $RS = tang.\,a$. Man hat aber offenbar

Fig. 10.



$$CG : GF = CR : RS,$$

oder was dasselbe ist

$$cos.\,a : sin.\,a = 1 : tang.\,a,$$

und daraus

$$tang.\,a = \frac{sin.\,a}{cos.\,a} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (19)$$

Nach dieser Formel kann man die Tangente eines Winkels berechnen, wenn Sinus und Cosinus desselben bekannt sind, so ist z. B.

$$tang.\ 30^0 = \frac{sin.\ 30^0}{cos.\ 30^0} = \frac{0{,}5}{0{,}866025} = 0{,}577350.$$

In Fig. 9 sind die beiden Dreiecke CRS und CTV ähnlich, denn es ist leicht zu zeigen, daß Winkel $CSR = b$ und Winkel $CVT = a$ ist. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke zieht man aber die Proportion

$$CR : RS = TV : CT$$

oder

$$1 : tang.\,a = cotang.\,a : 1,$$

woraus folgt

$$cotang.\,a = \frac{1}{tang.\,a} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (20)$$

Demnach ist

$$cotang.\ 30^0 = \frac{1}{tang.\ 30^0} = \frac{1}{0{,}577350} = 1{,}732051.$$

Setzt man in Gleichung (20) für *tang.* a seinen Werth $\frac{sin.\,a}{cos.\,a}$, so kommt:

$$cotang.\,a = 1 : \frac{sin.\,a}{cos.\,a} = \frac{cos.\,a}{sin.\,a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

es ist mithin auch

$$cotang.\;30^0 = \frac{cos.\;30^0}{sin.\;30^0} = \frac{0{,}866025}{0{,}5} = 1{,}732051.$$

Tangente der Summe und der Differenz zweier Winkel. 15
Den Werth von *tang.* (a + b) findet man auf folgende Weise:

$$tang.\;(a + b) = \frac{sin.\;(a + b)}{cos.\;(a + b)} = \frac{sin.\,a\;cos.\,b + sin.\,b\;cos.\,a}{cos.\,a\;cos.\,b - sin.\,a\;sin.\,b};$$

dividirt man Zähler und Nenner durch *cos.* a *cos.* b, so kommt

$$tang.\;(a + b) = \frac{\frac{sin.\,a}{cos.\,a} + \frac{sin.\,b}{cos.\,b}}{1 - \frac{sin.\,a}{cos.\,a} \cdot \frac{sin.\,b}{cos.\,b}}$$

und daraus endlich

$$tang.\;(a + b) = \frac{tang.\,a + tang.\,b}{1 - tang.\,a\;tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Auf ähnliche Weise findet man *tang.* (a — b):

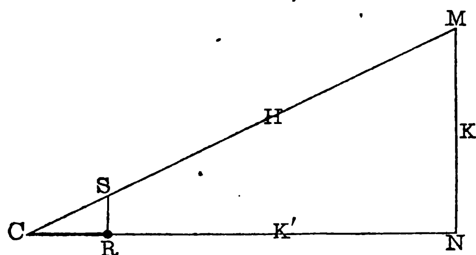
$$tang.\;(a - b) = \frac{sin.\;(a - b)}{cos.\;(a - b)} = \frac{sin.\,a\;cos.\,b - sin.\,b\;cos.\,a}{cos.\,a\;cos.\,b + sin.\,a\;sin.\,b}$$

und daraus

$$tang.\;(a - b) = \frac{tang.\,a - tang.\,b}{1 + tang.\,a\;tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Anwendung der Tangente bei der Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke. 16
Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete und der Winkel bekannt ist, welcher der unbekannten Kathete gegenüberliegt, so kann man mit Hülfe der Tangente dieses Winkels die fehlende Kathete berechnen. In dem rechtwinkeligen Dreieck *CNM*, Fig. 11, sei die Kathete *K'* und der Winkel *MCN* = a bekannt. Denkt man sich auf *K'* einen

Fig. 11.



Punkt R bezeichnet, dessen Entfernung von dem Scheitel C des Winkels a gleich 1 ist, und in R ein Perpendikel RS errichtet, so ist dieses Perpendikel *tang.* a; man hat wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$1 : tang.\,a = K' : K$$

und daraus

$$K = K' \; tang.\,a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

das heißt mit Worten: man findet die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die andere Kathete mit der Tangente desjenigen Winkels multiplicirt, welcher der gesuchten Kathete gegenüberliegt.

Beispiele. 1. Die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks sei 327′, der Winkel, den sie mit der Hypotenuse bildet, sei 25°; wie groß ist die andere Kathete?

2. Wenn ein Beobachter 156′ weit von einem Baume entfernt ist, wenn sein Auge O, Fig. 12, 5′ über dem Boden sich befindet, und die

Fig. 12.

durch das Auge nach dem Gipfel des Baumes gerichtete Gerade einen Winkel von 36° mit der horizontalen Ebene macht, die Höhe des Baumes zu berechnen.

3. Der Eckwinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist bekanntlich

$$\frac{2 \,.\, 5\,\mathfrak{R}. - 4\,\mathfrak{R}.}{5} = {}^6/_5\,\mathfrak{R}. = 108^0.$$

Denkt man sich von dem Mittelpunkte einen Radius nach einem Eck gezogen, so halbirt er den Fünfeckswinkel, dieser Radius macht also mit der Fünfecksseite einen Winkel von 54°. Fällt man nun von dem Mittelpunkte ein Perpendikel p auf die Fünfecksseite S, so entsteht ein recht-

winkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse der Radius, dessen eine Kathete die halbe Fünfecksseite $S . \frac{1}{2}$, und dessen andere Kathete das Perpendikel p ist. Der Winkel, welcher dem Perpendikel p gegenüberliegt, ist 54^0, man hat demnach

$$p = \frac{S}{2} \,.\, tang.\ 54^0.$$

Da nun der halbe Umfang des Fünfecks $\frac{5\,S}{2}$ ist, und man den Flächeninhalt J des regelmäßigen Fünfecks erhält, wenn man den halben Umfang mit dem Perpendikel p multiplicirt, so ergiebt sich

$$J = \frac{5\,S}{2} \,.\, \frac{S}{2} \,.\, tang.\ 54^0 = {}^5/_4\, S^2 \,.\, tang.\ 54^0.$$

Wie groß ist der numerische Werth von J, wenn $S = 2{,}7''$?

Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man allgemein den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks von N Seiten.

$$J = \frac{N S}{2} \,.\, \frac{S}{2} \,.\, tang. \left(\frac{2\,N \mathfrak{R}. - 4\,\mathfrak{R}.}{2\,N}\right).$$

Der Schüler darf nicht eher weiter gehen, als bis er sich vollständig von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt hat. Setzt man z. B. in diese Formel $N = 10$ und $S = 9''$, so erhält man den Inhalt eines regelmäßigen Zehnecks, an welchem jede Seite $9''$ lang ist. Wie groß ist der Inhalt eines regelmäßigen Zwölfecks, wenn jede Seite $3{,}5'$ lang ist?

Aus der Gleichung $K = K'\ tang.\, a$ folgt:

$$tang.\ a = \frac{K}{K'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

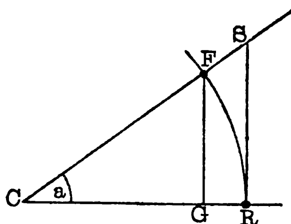
das heißt in Worten: *man findet die Tangente eines Winkels in einem rechtwinkeligen Dreieck, wenn man die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete durch die ihm anliegende dividirt.*

Wäre z. B. in einem rechtwinkeligen Dreieck die eine Kathete 4, die andere 3, so ist die Tangente des Winkels, welcher der Kathete 3 gegenüberliegt, $^3/_4 = 0{,}75$. Sucht man diese Tangente in den Tafeln, so findet man den zugehörigen Winkel. Wenn sich der berechnete Werth der Tangente nicht unmittelbar selbst in den Tafeln findet, so finden sich doch zwei Gränzen, zwischen denen er liegt, und man kann alsdann den Winkel selbst durch eine einfache Interpolation (§. 3) bestimmen.

Die trigonometrischen Linien im Kreise. Häufig werden die 17
trigonometrischen Linien auf folgende Weise definirt:

Zieht man in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich 1 ist, zwei Radien *CF* und *CR*, Fig. 13, die einen Winkel a mit einander machen, so heißt das vom Endpunkt *F* des einen Radius auf den andern gefällte Perpendikel *FG* Sinus des Winkels a, *cd* aber der Cosinus desselben.

Fig. 13.



Zieht man in *R* eine Berührende an den Kreis, so ist das Stück derselben, welches zwischen *R* und der Verlängerung des Halbmessers *CF* liegt, die Tangente des Winkels a. Die Tangente des Winkels, welche den Winkel a zu einem rechten ergänzt, heißt Cotangente des Winkels a.

Man wird sich leicht überzeugen können, daß diese Definitionen sich nicht im Wesentlichen von den oben gegebenen unterscheiben.

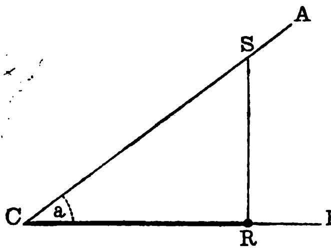
Construirt man in einem Kreise, dessen Radius nicht 1, sondern 10 000 000 000 ist, Linien, welche den trigonometrischen Linien entsprechen, so sind sie natürlich zehntausend Millionen mal größer als die in einen Kreis construirten, dessen Radius 1 ist. So ist z. B. $sin. 36^0 = 0{,}587785$, und die diesem Sinus entsprechende, in einen Kreis von einem Radius gleich 10 000 000 000 construirte Linie ist 5 877 850 000. (Die letzten vier mit 0 ausgefüllten Stellen sind natürlich nicht genau.) Der Logarithme dieser letzteren Zahl ist demnach auch um 10 größer, als der Logarithme von $sin. 36^0$. In den meisten logarithmisch trigonometrischen Tafeln findet man also nicht die Logarithmen der eigentlichen trigonometrischen Linien, sondern die Logarithmen derjenigen Linien, welche, dem Sinus, Cosinus, der Tangente und Cotangente entsprechend, in einen Kreis construirt sind, dessen Radius 10 000 000 000 ist.

18 **Secante, Cosecante und Sinus Versus.** Bis jetzt war nur von den vier trigonometrischen Linien die Rede, welche sich in den Tafeln finden, nämlich vom Sinus, vom Cosinus, der Tangente und der Cotangente. Wir haben nun noch einige andere trigonometrische Functionen zu betrachten, welche zwar weniger oft bei praktischen Rechnungen vorkommen, deren man sich aber oft zur Vereinfachung zusammengesetzter Formeln bedienen kann.

Die Secante des Winkels a ist die Hypotenuse *CS* des recht-

winkeligen Dreiecks CSR, Fig. 14, dessen eine Kathete CR gleich 1, dessen andere Kathete RS aber gleich *tang.* a ist. Es ist demnach

Fig. 14.



$$(sec.\,a)^2 = 1 + (tang.\,a)^2.$$

Setzt man für *tang.* a seinen Werth $\frac{sin.\,a}{cos.\,a}$, so kommt

$$(sec.\,a)^2 = 1 + \frac{(sin.\,a)^2}{(cos.\,a)^2}$$

oder

$$(sec.\,a)^2 = \frac{(cos.\,a)^2 + (sin.\,a)^2}{(cos.\,a)^2} = \frac{1}{(cos.\,a)^2}$$

also

$$sec.\,a = \frac{1}{cos.\,a}.$$

Man hätte diesen Werth von *sec.* a auch direct aus der Betrachtung der Figur ableiten können.

Die Cosecante des Winkels a ist die Secante des Winkels, welcher den Winkel a zu einem rechten ergänzt, demnach also

$$(cosec.\,a)^2 = 1 + (cotang.\,a)^2$$

und

$$cosec.\,a = \frac{1}{sin.\,a}.$$

Der Sinus Versus oder Quersinus eines Winkels a wird erhalten, wenn man *cos.* a von 1 abzieht. Es ist also

$$sin.\,vers.\,a = 1 - cos.\,a.$$

Die trigonometrischen Functionen stumpfer Winkel. Wenn man nach den in den §§. 1, 12 und 13 gegebenen Definitionen den Sinus und den Cosinus, die Tangente und die Cotangente stumpfer Winkel zu construiren versucht, so treffen die nach den citirten Angaben zu fällenden oder zu errichtenden Perpendikel nicht mehr den andern Schenkel des Winkels, sondern dessen Verlängerung, und dadurch treten Modificationen ein, welche wir näher betrachten müssen. 19

Schneidet man auf dem einen Schenkel CA, Fig. 15 (a. f. S.), eines stumpfen Winkels BCA, den wir mit a bezeichnen wollen, ein Stück CF ab, welches der Längeneinheit gleich ist, so trifft eine durch F rechtwinkelig zum andern Schenkel CB gezogene Linie nicht mehr den Schenkel CB selbst, sondern dessen Verlängerung CD.

Das Perpendikel FG ist nun der Sinus des stumpfen Winkels a. Dieses Perpendikel ist aber auch der Sinus des Winkels b,

welcher a zu 180° ergänzt oder mit anderen Worten: **der Sinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus seines spitzen Nebenwinkels**; es ist also z. B.

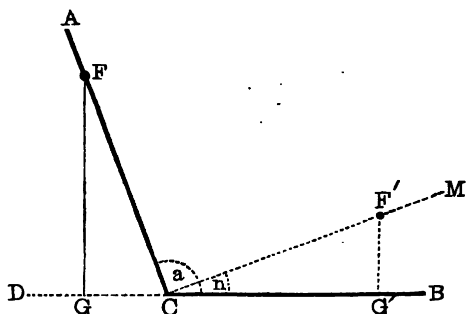
$$sin. 100^\circ = sin. (180^\circ - 100^\circ) = sin. 80^\circ$$
$$sin. 150^\circ = sin. (180^\circ - 150^\circ) = sin. 30^\circ$$

oder allgemein

$$sin. a = sin. (180^\circ - a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Da GF, der Sinus des stumpfen Winkels a, mit $G'F'$, dem Sinus eines von demselben Schenkel CB an gezählten spitzen Winkels n, gleiche Lage zu der Richtung des Schenkels CB hat, indem beide oberhalb DB liegen, so kommt also dem Sinus eines stumpfen Winkels dasselbe Vorzeichen zu wie dem Sinus eines spitzen.

Fig. 15.



Daraus geht nun hervor, daß jeder Sinus zu gleicher Zeit zwei Winkeln angehört, einem spitzen und einem stumpfen. So gehört z. B. der Sinus 0,422618 dem Winkel von 25° und dem Winkel von 155° an; der Sinus 0,829038 gehört dem Winkel von 56° und dem Winkel von 124° an. Wenn man demnach als Resultat einer Rechnung den Sinus eines Winkels findet, so ist es noch zweifelhaft, ob der diesem Sinus entsprechende spitze oder stumpfe Winkel den Forderungen der Aufgabe entspricht. Manchmal leisten beide den Bedingungen der Aufgabe Genüge; solche Fälle werden wir später noch kennen lernen; manchmal auch nur einer. So haben wir gefunden, daß, wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse 15, die eine Kathete 4 ist, 0,266666 der Sinus des der Kathete von 4 gegenüberliegenden Winkels sei. Der Sinus 0,266666 gehört aber einem spitzen und einem stumpfen Winkel an, der stumpfe Winkel muß aber bei unserer Auflösung ganz ausgeschlossen bleiben, weil in einem rechtwinkeligen Dreiecke kein stumpfer Winkel vorkommen kann. Obgleich also dem Sinus 0,2666 ... auch ein stumpfer Winkel entspricht, so muß er hier doch unberücksichtigt bleiben, weil er den übrigen Bedingungen der Aufgabe nicht Genüge leistet.

Anders verhält es sich mit dem Cosinus stumpfer Winkel. Denken wir uns die Linie CM, Fig. 15, so geschwenkt, daß der Winkel n wächst, so nähert sich der Fußpunkt G' des Perpendikels $F'G'$ dem Scheitel C, d. h. mit wachsendem Winkel nimmt der Cosinus ab, um 0 zu werden, wenn n bis auf 90^0 gewachsen ist. Wird aber der beweglich gedachte Schenkel noch über 90^0 hinaus, etwa bis CA, geschwenkt, so geht der Fußpunkt des als Sinus bezeichneten Perpendikels auf die andere Seite von C über, der Cosinus GC des stumpfen Winkels a hat also die entgegengesetzte Lage des von demselben Schenkel CB an gezählten spitzen Winkels n; während der Cosinus des spitzen Winkels n von C nach der rechten Seite hin gezählt wird, erstreckt sich der Cosinus des stumpfen Winkels a von C nach der linken. Bezeichnet man eine von C nach rechts gemessene Länge als positiv, so müssen wir eine von C nach links gemessene als negativ bezeichnen; der Cosinus eines stumpfen Winkels ist also negativ.

Der Größe nach ist, wie leicht einzusehen, der Cosinus des stumpfen Winkels a gleich dem Cosinus seines spitzen Nebenwinkels b; es ist also

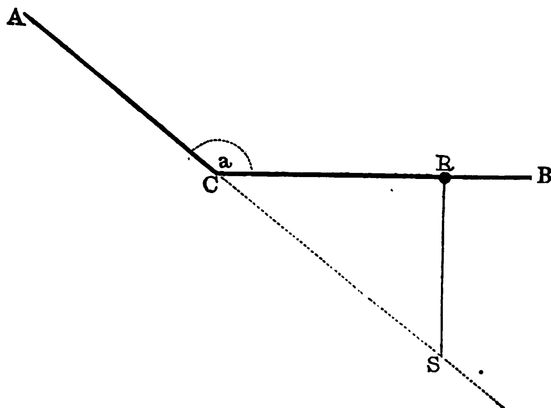
$$cos.\, \mathrm{a} = -\, cos.\, (180^0 - \mathrm{a}).$$

So ist z. B. $cos.\, 142^0 = -\, cos.\, 38$; $cos.\, 120 = -\, cos.\, 60$ u. s. w.

Da
$$tang.\, \mathrm{a} = \frac{sin.\, \mathrm{a}}{cos.\, \mathrm{a}},$$

so ist die Tangente eines stumpfen Winkels negativ, indem für $\mathrm{a} > 90^0$ $cos.\, \mathrm{a}$ negativ wird, während $sin.\, \mathrm{a}$ positiv bleibt.

Fig. 16.



Es läßt sich dies auch durch Construction nachweisen. Es sei, Fig. 16,

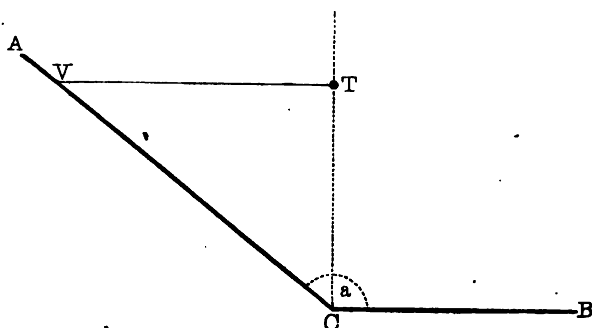
BCA der stumpfe Winkel a, dessen Tangente man construiren soll. Macht man, wie bei der in §. 12 angegebenen Construction, $CR = 1$, so wird ein in *R* nach oben errichtetes Perpendikel den andern Schenkel *CA* des Winkels a gar nicht treffen, während ein nach abwärts gezogenes Perpendikel die Verlängerung des Schenkels *AC* in *S* trifft. *RS* ist die Tangente des stumpfen Winkels a, sie ist negativ, weil sie von *C* nach unten gerichtet ist.

Der Größe nach ist die Tangente eines stumpfen Winkels a gleich der Tangente seines spitzen Nebenwinkels b, also

$$tang.\,a = -\,tang.\,(180^0 - a).$$

Machen wir in Fig. 17 $CT = 1$, so ist die rechtwinkelig zu *CT* von *T* nach links gezogene Linie *TV* die Cotangente des stumpfen

Fig. 17.



Winkels a; sie ist negativ, weil die von *CT* aus nach der rechten Seite hin gemessenen Längen als positive genommen werden. Es ist also

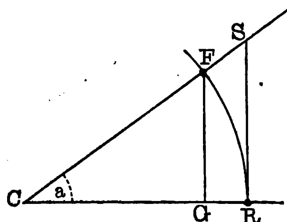
$$cotang.\,a = -\,tang.\,(180^0 - a).$$

20 **Berechnung der Tafeln.** Wir haben zwar oben schon gesehen, wie Sinus und Cosinus von 45°, 75°, 60°, 30°, 15° berechnet wird; mit den dazu angewandten Mitteln ist man jedoch nicht im Stande, die Sinus und Cosinus aller Winkel, die in ununterbrochener Reihe von Grad zu Grad, oder von Minute zu Minute u. s. w. auf einander folgen, zu berechnen. Zur Berechnung einer solchen ununterbrochenen Reihe von trigonometrischen Linien gelangt man durch den im Folgenden angegebenen Weg.

Zwei Radien *CF* und *CR* eines Kreises, Fig. 18, schließen einen Bogen $FR = x$ ein, welcher sich zur Peripherie des ganzen Kreises

verhält, wie der Winkel a, den die beiden Radien mit einander machen, zu 360°. Wenn der Radius des Kreises = 1 ist, wie bei der ganzen folgenden Betrachtung stets angenommen werden soll, so hat man also die Proportion

Fig. 18.



$$x : 2\pi = a : 360^0$$

oder

$$x : \pi = a : 180^0.$$

Nach dieser Proportion ist es nun leicht, einen Bogen x zu berechnen, welcher einen gegebenen Winkel überspannt. Es soll z. B. der Bogen berechnet werden, welcher einen Winkel von 1^0 überspannt, so hat man

$$x : 3{,}141592 = 1 : 180$$

und daraus

$$x = 0{,}017453.$$

Der Bogen, welcher einen Winkel von 10′ überspannt, ist der sechste Theil des eben gefundenen, also

$$x = 0{,}00290888.$$

Nun aber sieht man leicht ein, daß der Sinus eines Winkels a stets kleiner sein muß, als der den Winkel a überspannende Bogen x, daß ferner *sin.* a um so weniger von x verschieden sein kann, je kleiner a ist. So ist z. B. *sin.* 1^0 nicht viel von dem den Winkel von 1^0 überspannenden Bogen verschieden, welcher, wie wir gesehen haben, 0,017453 ist. Um aber entscheiden zu können, auf wie viel Decimalstellen der Sinus eines Winkels mit dem ihn überspannenden Bogen übereinstimmt, dient folgende Betrachtung.

In Fig. 18 ist $FG = sin.\,a$, $SR = tang.\,a$. Der Bogen FR soll noch mit x bezeichnet werden, so hat man offenbar

$$sin.\,a < x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

und

$$tang.\,a > x.$$

Setzen wir für *tang.* a seinen Werth $\frac{sin.\,a}{cos.\,a}$, so hat man also auch

$$\frac{sin.\,a}{cos.\,a} > x$$

und daraus

$$sin.\,a > x\,.\,cos.\,a$$

Weil aber $cos.\,a$ jedenfalls kleiner als 1 ist, so ist auch $(cos.\,a)^2 < cos.\,a$, demnach auch

$$sin.\,a > x\,.\,(cos.\,a)^2$$

oder

$$sin.\,a > x\,[1 - (sin.\,a)^2],$$

wenn man für $(cos.\,a)^2$ seinen Werth $1 - (sin.\,a)^2$ setzt. Weil $x > sin.\,a$, so ist auch $1 - x^2$ kleiner als $1 - (sin.\,a)^2$, also auch

$$sin.\,a > x\,(1 - x^2)$$

oder endlich

$$sin.\,a > x - x^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

Aus (I) und (II) ersieht man nun, daß $sin.\,a$ zwischen den beiden Gränzen x und $x - x^3$ liegt. Die Differenz dieser beiden Gränzen ist x^3, und diese Differenz wird um so kleiner, je kleiner x wird. Je kleiner also der Winkel a wird, um so näher liegen die beiden Gränzen zusammen, zwischen welchen $sin.\,a$ eingeschlossen ist. So liegt z. B. $sin.\,1^0$ zwischen den Gränzen 0,017453 und $0{,}017453 - 0{,}017453^3$ oder

$$sin.\,1^0 < 0{,}017453$$

und

$$sin.\,1^0 > 0{,}017453 - 0{,}00000536 > 0{,}01744764.$$

Die beiden Gränzen, zwischen denen $sin.\,1^0$ liegen muß, differiren erst auf der fünften Decimalstelle, wenn man also 0,017453 für den Sinus von 1^0 nimmt, so weiß man zwar, daß dieser Werth zu groß ist, man weiß aber auch, daß er höchstens auf der fünften Decimalstelle vom wahren Werth verschieden sein kann; wo also keine größere Genauigkeit nöthig ist, kann man bei diesem Werthe stehen bleiben.

Weit genauer können wir nach derselben Methode den Werth von $sin.\,10'$ ausmitteln. Der den Winkel von $10'$ überspannende Bogen ist 0,002909, mithin

$$sin.\,10' < 0{,}00290888$$
$$sin.\,10' > 0{,}00290888 - 0{,}0000000246$$

oder

$$sin.\,10' > 0{,}0029088654\,\ldots$$

Die beiden Gränzen, zwischen welchen $sin.\,10'$ liegt, sind, wie man sieht, nur um 0,0000000246 von einander verschieden; nimmt man also 0,00290888 für $sin.\,10'$, so kann man gewiß sein, daß dieser Werth nicht um Dreihundertmilliontheil fehlerhaft ist. Will man also $sin.\,10'$ nur auf sechs Decimalstellen genau haben, so ist er 0,002909. Diese Genauigkeit ist meistens genügend. Da der Sinus von $10'$ erst auf der

achten Decimalstelle von dem denselben Winkel überspannenden Bogen differirt, so werden auch der Sinus und der Bogen von 1′ noch auf mehr Decimalstellen übereinstimmen, und man kann daher den Bogen, welcher den Winkel von 1′ überspannt und dessen Länge 0,000291 beträgt, ohne Weiteres für *sin.* 1′ nehmen, wenn man nur sechs Decimalstellen berücksichtigen will.

Da nun *sin.* 10′ bekannt ist, so findet man nach der Gleichung $cos. a = \sqrt{1 - (sin. a)^2}$ den Werth von *cos.* 10′; er ist 0,999996. Nach Gleichung (12) ist aber

$sin. 20' = 2 . sin. 10' . cos. 10' = 2 \times 0{,}002909 . 0{,}999996 = 0{,}005818$

und nach Gleichung (14)

$$cos. 20' = 1 - 2\ (sin. 10')^2$$

$$cos. 20' = 1 - 2\ .\ 0{,}002909^2 = 0{,}999983.$$

Ferner ist

$$sin. 40' = 2\ .\ sin. 20'\ .\ cos. 20'$$

$$sin. 40' = 2\ .\ 0{,}005818 \times 0{,}999983$$

$$sin. 40' = 0{,}011635$$

und

$$cos. 40' = 1 - 2\ .\ (sin. 20')^2$$

$$cos. 40' = 1 - 2\ .\ 0{,}005818^2 = 0{,}999932.$$

Nach Gleichung (8) erhält man $sin. 60' = sin. 1^0$

$$sin. 1^0 = sin. 40'\ .\ cos. 20' + cos. 40'\ .\ sin. 20'$$

und nach Gleichung (9)

$$cos. 1^0 = cos. 40'\ .\ cos. 20' - sin. 40'\ .\ sin. 20'.$$

Substituirt man in diese beiden letzten Gleichungen für *sin.* 40′, *cos.* 40′, *sin.* 20′ und *cos.* 20′ ihre Werthe, so findet man

$$sin. 1^0 = 0{,}017452$$

$$cos. 1^0 = 0{,}999848.$$

Auf diesem Wege kann man die Sinus und Cosinus aller Winkel von 10′ zu 10′ berechnen. Hat man *sin.* 1′ berechnet, so kann man auf diesem Wege die Sinus und Cosinus aller Winkel von Minute zu Minute berechnen. Um auf diese Weise Tafeln zu berechnen, ist es übrigens durchaus nöthig, den kleinsten Sinus der Tafeln sowie alle folgenden auf mehr Decimalstellen genau zu berechnen, als man behalten will, um zu verhüten, daß die Fehler sich anhäufen und dadurch die letzten Ziffern fehlerhaft werden. Auch ist es nöthig, die gefundenen Werthe von Sinus und Cosinus dadurch zu controliren, daß man von

Sinus und Cosinus von 75°, 60°, 45°, 40°, 15°, die man auf anderem Wege berechnet hat (§. 5), ausgehend, die Sinus und Cosinus verschiedener Winkel berechnet, und die auf beiden Wegen erhaltenen Resultate vergleicht.

Zur Vervollständigung der Tafeln sind nur noch die Tangenten und Cotangenten zu berechnen. Nachdem die Sinus und Cosinus bekannt sind, ist diese Berechnung sehr einfach. Die Tangenten findet man mit Hülfe der Formel $tang.\,a = \frac{sin.\,a}{cos.\,a}$, die Cotangenten mit Hülfe der Formel $cotang.\,a = \frac{cos.\,a}{sin.\,a}$.

Das in diesem Abschnitt Gesagte soll nur dazu dienen, einen Weg zu zeigen, auf welchem man die Tafeln berechnen kann. Daß dieser Weg jedoch äußerst mühsam ist, wird wohl Jeder zugeben, der nur die Berechnung einiger Sinus und Cosinus versucht hat. Die Analysis liefert Mittel, welche weit rascher zu diesem Ziele führen.

Zweites Kapitel.

Anwendung der trigonometrischen Functionen zur Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke.

---

21 **Grundgleichungen des Dreiecks.** Wir haben bis jetzt die trigonometrischen Linien nur zur Berechnung der fehlenden Stücke rechtwinkeliger Dreiecke angewandt, sie dienen jedoch auch zur Berechnung der fehlenden Stücke in schiefwinkeligen Dreiecken. Diese Berechnung stützt sich stets auf eine der gleich zu entwickelnden Gleichungen, welche die Beziehungen ausdrücken, in welchen die verschiedenen Elemente eines Dreiecks zu einander stehen.

In Fig. 19 seien die drei Seiten des Dreiecks mit A, B und C bezeichnet, die ihnen gegenüberstehenden Winkel aber mit den entsprechenden Buchstaben des griechischen Alphabets. Von der Spitze des Winkels

α ist ein Perpendikel p auf die Seite A gefällt; dieses Perpendikel theilt die Linie A in zwei Theile b und c. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist nun

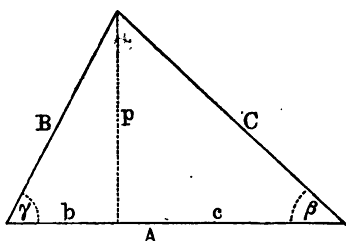


Fig. 19.

$$p^2 = B^2 - b^2,$$

aber auch

$$p^2 = C^2 - c^2,$$

mithin

$$C^2 - c^2 = B^2 - b^2,$$

also

$$C^2 = B^2 + c^2 - b^2.$$

Nun aber ist $c = A - b$, also $c^2 = A^2 - 2Ab + b^2$; substituirt man diesen Werth von c^2 in die letzte Gleichung, so kommt

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2Ab,$$

nun aber ist offenbar $b = B \cos.\gamma$, also

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos.\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

das heißt in Worten: In einem jeden Dreieck erhält man das Quadrat einer Seite, wenn man die Quadrate der beiden anderen Seiten addirt und von der Summe das doppelte Product der beiden anderen Seiten multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie einschließen, abzieht.

Die zweite Grundgleichung erhält man gleichfalls aus der Betrachtung der Fig. 19. Es ist nämlich

$$p = B \sin.\gamma,$$

aber auch

$$p = C \,.\, \sin.\beta,$$

also

$$B \sin.\gamma = C \,.\, \sin.\beta;$$

aus dieser Gleichung aber folgt

$$\frac{B}{C} = \frac{\sin.\beta}{\sin.\gamma}$$

oder

$$B : C = \sin.\beta : \sin.\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

das heißt in Worten: Je zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel.

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen (27) und (28) kann man stets, wenn drei Elemente eines Dreiecks gegeben sind, unter denen sich aber

wenigstens eine Seite befinden muß, die drei anderen Stücke des Dreiecks berechnen. Die verschiedenen hier möglichen Fälle wollen wir in derselben Ordnung wie in der Geometrie betrachten.

I. Gegeben: Drei Seiten. In diesem Falle sind die drei Winkel zu bestimmen. Gleichung (27) giebt uns die Relation, in welcher der Cosinus eines Winkels im Dreieck zu den drei Seiten steht. Aus dieser Gleichung folgt

$$cos.\gamma = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

das heißt in Worten: man findet den Cosinus eines Dreieckswinkels, wenn man die Quadrate der beiden Seiten addirt, welche den gesuchten Winkel einschließen, von der Summe das Quadrat der ihm gegenüberstehenden Seite abzieht, und die gefundene Differenz durch das doppelte Product der beiden den gesuchten Winkel einschließenden Seiten dividirt. Ganz analog ist also auch

$$cos.\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2B.C}$$

und

$$cos.\beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2A.C}.$$

Es seien z. B. die drei Seiten eines Dreiecks 6′, 7′ und 8′, so ist der Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 6′ gegenübersteht,

$$\frac{7^2 + 8^2 - 6^2}{2.7.8} = \frac{77}{112} = 0{,}687500.$$

Der diesem Cosinus angehörige Winkel ist $46^0\,34{,}1'$.

Der Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 7′ gegenübersteht, ist

$$\frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2.6.8} = \frac{51}{96} = 0{,}53124,$$

der dazu gehörige Winkel $57^0\,54{,}6'$.

Der Cosinus des dritten Winkels ist

$$\frac{7^2 + 6^2 - 8^2}{2.7.6} = \frac{21}{54} = 0{,}25,$$

wonach der dritte Winkel selbst $75^0\,31{,}3'$.

Berechnet man auf diese Weise die drei Winkel des Dreiecks, dessen Seiten 3′, 4′ und 6′ sind, so findet man für den Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 6′ gegenüberliegt,

$$\frac{16 + 9 - 36}{24} = -\frac{11}{24} = -0{,}458\ldots$$

Weil der Cosinus dieses Winkels negativ ist, so ist der Winkel selbst ein stumpfer, und zwar ist er der Nebenwinkel von dem, den man für den Cosinus 0,458 ... in den Tafeln findet. So oft man überhaupt nach dieser Formel einen negativen Cosinus findet, so ersieht man daraus, daß das fragliche Dreieck ein stumpfwinkeliges ist.

In dem Dreieck, dessen drei Seiten 3′, 4′ und 5′ sind, findet man für den Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 5′ gegenübersteht,

$$\frac{9 + 16 - 25}{24} = 0,$$

der Winkel selbst ist also ein rechter.

Es seien 3′, 4′ und 8′ die drei Seiten eines Dreiecks, so ergiebt sich für den Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 3′ gegenübersteht,

$$\frac{64 + 16 - 9}{64} = {}^{71}/_{64} = 1{,}1\,\ldots,$$

d. h. ein Werth, welcher größer ist als 1; da aber kein Cosinus größer als 1 sein kann, so gehört der gefundene Cosinus einem unmöglichen Winkel an, oder mit anderen Worten: mit den drei Seiten 3′, 4′ und 8′ kann gar kein Dreieck gebildet werden. Daß dem so sei, kann man auch daraus schon erkennen, daß die Seite 8′ größer ist als die beiden anderen zusammengenommen.

Wie groß sind die drei Winkel in folgenden Dreiecken?

A	B	C
127′	94′	156′
93′	84′	72′
87′	112′	68′

II. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. Es sei gegeben der Winkel γ und die beiden Seiten A und B, welche diesen Winkel bilden, so giebt uns Gleichung (27) unmittelbar das Quadrat der dritten Seite, nämlich

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\ \cos.\gamma.$$

Es sei z. B. $A = 3'$, $B = 4'$, $\gamma = 58^0$, so ist

$$C^2 = 9 + 16 - 2\,.\,3\,.\,4\,.\,\cos.58^0 = 12{,}282;\ C = 3{,}5\ \ldots.$$

Nachdem nun die drei Seiten bekannt sind, kann man nach dem im

vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren auch noch die beiden fehlenden Winkel suchen.

So lange γ ein spitzer Winkel ist, bleibt $cos. \gamma$ positiv und das letzte Glied im Werth von C^2 negativ. In einem spitzwinkeligen Dreieck ist demnach das Quadrat jeder Seite kleiner, als die Quadrate der beiden anderen zusammengenommen; ist γ ein rechter Winkel, so ist $cos. \gamma = 0$, und der Werth von C^2 reducirt sich auf $A^2 + B^2$, was wir schon durch den Pythagoräischen Lehrsatz wußten. Sobald γ ein stumpfer Winkel ist, wird $cos. \gamma$ negativ und dadurch das letzte Glied im Werthe von C^2 positiv. In einem stumpfwinkeligen Dreieck ist demnach das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als das Quadrat der beiden anderen Seiten zusammengenommen.

Es sei z. B. $A = 7'$, $B = 4'$, $\gamma = 124^0$, so ist

$$C^2 = 49 + 16 - 2 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, cos. 124^0$$

$$C^2 = 49 + 16 + 2 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, cos. 56^0 = 65 + 56 \,.\, 0{,}559193.$$

Den übrigen Theil der Rechnung mag der Schüler ausführen.

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, so kann man, wie schon bemerkt wurde, die fehlenden Winkel dadurch finden, daß man zuerst mit Hülfe der Gleichung (27) die fehlende Seite berechnet, und wenn der numerische Werth derselben bekannt ist, mit Hülfe der Gleichung (29) die fehlenden Winkel bestimmt. Dieser Weg ist aber etwas umständlich, und deshalb ist es wünschenswerth, eine Formel zu haben, nach welcher man direct die fehlenden Winkel bestimmen kann, ohne zuerst die fehlende Seite zu suchen. Zu einer solchen Formel kommen wir durch folgende Betrachtung. Es ist bekanntlich

$$A : sin. \alpha = B : sin. \beta.$$

Wenn nun die Seiten A und B nebst dem Winkel γ bekannt sind, so sind in dieser Gleichung zwei unbekannte Größen, es läßt sich also aus dieser Gleichung allein weder α noch β bestimmen. Nun ist aber $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ oder $\alpha = 180^0 - \beta - \gamma$; also $sin. \alpha = sin. (\beta + \gamma)$ $sin. \alpha = sin. \beta \; cos. \gamma + cos. \beta \; sin. \gamma$; substituirt man diesen Werth in obige Gleichung, so kommt

$$A \,.\, sin. \beta = B \, (sin. \beta \,.\, cos. \gamma + cos. \beta \; sin. \gamma).$$

In dieser Gleichung ist nur noch der Winkel β unbekannt. Dividirt man auf beiden Seiten mit $cos. \beta$, so kommt

$$A \,.\, tang. \beta = B \; tang. \beta \; cos. \gamma + B \,.\, sin. \gamma$$

und daraus

$$tang.\beta = \frac{B \cdot sin.\gamma}{A - B \cdot cos.\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

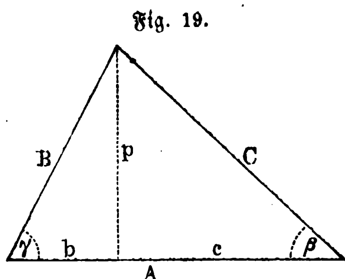
Dieser Gleichung ganz analog ist

$$tang.\alpha = \frac{A \cdot sin.\gamma}{B - A \cdot cos.\gamma}.$$

Man hätte die Formel (30) auch direct aus der Figur ableiten können. In Fig. 19 ist nach Gleichung (25)

$$tang.\beta = \frac{p}{c} = \frac{p}{A - b}.$$

Fig. 19.



Es ist aber $p = B \cdot sin.\gamma$, $b = B\ cos.\gamma$; substituirt man diese Werthe in den letzten Werth von $tang.\beta$, so findet man für $tang.\beta$ denselben Werth wie in Gleichung (30).

Es sei z. B.

$A = 4'$, $B = 6'$, $\gamma = 42^0$,

so ist

$$tang.\beta = \frac{6 \times 0{,}669131}{4 - 6 \times 0{,}743145} = \frac{4{,}014786}{-0{,}458870} = -8{,}749333$$

$$\beta = 96^0 31'.$$

Wie groß ist α, β und C in folgenden Dreiecken?

A	B	γ
3728′	1942′	83⁰
763′	1024′	112⁰
0,57ᵐ	0,96ᵐ	58⁰

III. Gegeben zwei Seiten und ein Winkel, welcher der einen von beiden Seiten gegenübersteht. Es sei gegeben der Winkel β und die Seiten A und B, so hat man zur Berechnung des Winkels α

$$B : A = sin.\beta : sin.\alpha,$$

also ist

$$sin.\alpha = \frac{A \cdot sin.\beta}{B}.$$

Ist z. B. $A = 6'$, $B = 7'$, $\beta = 49^0$, so ist

$$sin.\,\alpha = \frac{6 \times 0{,}754710}{7} = 0{,}646894$$

$$\alpha = 40^0\,18'.$$

Aus der Geometrie (S. 19) ist bereits bekannt, daß ein Dreieck durch zwei Seiten und einen Winkel, welcher der einen der beiden Seiten gegenübersteht, nur dann bestimmt ist, wenn der Winkel der längeren Seite gegenüberliegt. Liegt der gegebene Winkel der kürzeren der gegebenen Seiten gegenüber, so kann man aus diesen Stücken entweder kein Dreieck construiren, oder zwei verschiedene. Wie aber können wir aus unserer Rechnung eine solche doppelte Auflösung erkennen? Durch die Rechnung findet man den Sinus des Winkels, welcher der einen gegebenen Seite gegenübersteht; oben ist aber gezeigt worden, daß jeder Sinus zugleich zwei Winkeln angehört, welche einander zu 180° ergänzen, und man erhält demnach zwei verschiedene Dreiecke, je nachdem man den zum berechneten Sinus gehörigen spitzen oder stumpfen Winkel nimmt.

Ein Beispiel mag das Gesagte klar machen. Es sei gegeben $A = 1''$, $B = 0{,}65''$, $\beta = 31^0$, so ist

$$sin.\,\alpha = \frac{1}{0{,}65} \cdot 0{,}515038 = 0{,}792366.$$

Der Sinus 0,792366 gehört aber gleichzeitig einem Winkel von 52° 25' und seinem Nebenwinkel 127° 35' an. Der der Seite A gegenüberstehende Winkel kann also entweder 52° 25' oder 127° 35' sein.

Da aber jeder Sinus zugleich einem spitzen und einem stumpfen Winkel angehört, so sollte man glauben, daß die trigonometrische Rechnung stets eine doppelte Auflösung gäbe, was den geometrischen Betrachtungen widerspricht. Der zum gefundenen Sinus gehörige stumpfe Winkel kann jedoch nur dann eine zweite Auflösung geben, wenn er mit dem gegebenen Winkel wirklich in einem Dreieck vorkommen kann, d. h. wenn er mit dem gegebenen zusammengenommen weniger als 180° ausmacht. Es ist dies aber nur dann der Fall, wenn der gegebene Winkel kleiner ist als der Nebenwinkel des berechneten stumpfen, d. h. wenn der berechnete spitze Winkel α größer ist als der gegebene Winkel β. Zwei Auflösungen sind also nur dann möglich, wenn $sin.\,\alpha > sin.\,\beta$; da aber $sin.\,\alpha = \frac{A}{B} \,.\, sin.\,\beta$, so sind also nur dann zwei Lösungen möglich,

wenn der Factor $\frac{A}{B} > 1$, d. h. wenn $A > B$, oder in Worten, wenn der gegebene Winkel der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt.

Im obigen Beispiel war gegeben $A = 6$, $B = 7$, $\beta = 49^0$, daraus ergab sich $sin.\,\alpha = 0{,}646894$. Von den beiden zu diesem Sinus gehörigen Winkeln $40^0\,18'$ und $139^0\,42'$ kann aber der letztere gar nicht in Betracht kommen, weil er mit den gegebenen 49^0 mehr als 180^0 beträgt, weil also die beiden Winkel von $139^0\,42'$ und 49^0 gar nicht in einem und demselben Dreieck vorkommen können. In diesem Falle entspricht nur der zum berechneten Sinus gehörige spitze Winkel von $40^0\,18'$ den Bedingungen der Aufgabe, es ist also nur eine Aufgabe möglich.

Wenn der berechnete Sinus größer als 1 ist, so ist die Auflösung unmöglich, d. h. es giebt kein Dreieck, welches den gegebenen Bedingungen entspricht.

Wäre z. B. $A = 4$, $B = 1$, $\beta = 41^0$, so fände man

$$sin.\,\alpha = 4\,.\,0{,}656\,.. = 2{,}624;$$

aus diesen gegebenen Stücken läßt sich kein Dreieck construiren. Man kann sich davon auch leicht durch die Zeichnung überzeugen.

Wenn α berechnet ist, ist nichts leichter als γ zu finden; die fehlende Seite C ist sodann leicht nach Formel (27) zu berechnen. Man kann jedoch auch die dritte Seite C finden, ohne vorher erst die numerischen Werthe von α und γ bestimmt zu haben. Die dazu nöthige Formel soll sogleich entwickelt werden.

Nach den oben entwickelten Gleichungen ist

$$C = \frac{A\,.\,sin.\,\gamma}{sin.\,\alpha}.$$

In diesem Werth von C kommen aber noch zwei unbekannte Größen vor, die eliminirt werden müssen. Weil $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$, so ist $sin.\,\gamma = sin.\,(\beta + \alpha)$, mithin

$$C = \frac{A\,.\,sin.\,(\alpha + \beta)}{sin.\,\alpha}$$

oder

$$C = \frac{A\,.\,sin.\,\alpha\,cos.\,\beta + A\,sin.\,\beta\,.\,cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha} = A\,.\,cos.\,\beta + A\,.\,sin.\,\beta\,\frac{cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha}.$$

In diesem Werth von C kommt nur noch eine unbekannte Größe α vor. Setzt man für $sin.\,\alpha$ seinen oben gefundenen Werth $\frac{A\,.\,sin.\,\beta}{B}$, so kommt

$$C = A\,.\,cos.\,\beta + B\,.\,cos.\,\alpha$$

und daraus

$$C = A \,.\, cos.\beta \pm B \,.\, \sqrt{(1 - sin.\alpha)^2},$$

und wenn man für $(sin.\alpha)^2$ wieder seinen Werth $\frac{A^2}{B^2}(sin.\beta)^2$ setzt,

$$C = A \,.\, cos.\beta \pm \sqrt{B^2 - A^2\,(sin.\beta)^2} \quad . \quad . \quad (31)$$

Dieser Werth von C zeigt schon eine doppelte Auflösung an, indem man zwei verschiedene Werthe von C erhält, je nachdem man die Wurzel positiv oder negativ nimmt.

Nehmen wir z. B. $A = 5^{cm}$, $B = 3^{cm}$, $\beta = 31^0$. Für dieses Dreieck findet man

$$C = 5 \,.\, 0{,}857 \pm \sqrt{9 - 25 \,.\, 0{,}265}$$
$$C = 4{,}285 \pm 1{,}540$$
$$C = 5{,}825 \; (RT, \text{ Fig. } 20)$$

oder

$$C = 2{,}745 \; (RT', \text{ Fig. } 21).$$

Um die Sache recht klar zu machen, ist es gut, die geometrische Bedeutung der einzelnen Theile des Werthes von C aufzusuchen. $A\,.\,cos.\beta$ ist die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, welche mit dessen Hypotenuse A einen Winkel β einschließt. Denken wir uns von S (Fig. 20 und Fig. 21) ein Perpendikel auf B gefällt und den Fußpunkt desselben mit O bezeichnet, so ist $RO = A\,.\,cos.\beta$, wenn RS mit A bezeichnet ist. Der zweite Theil des Werthes von C, nämlich

Fig. 20.

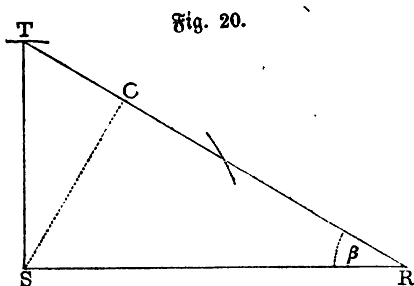
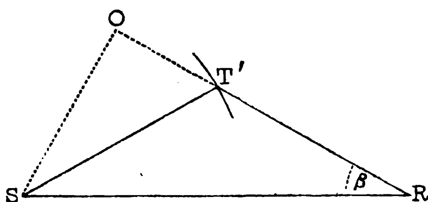


Fig. 21.



$$\sqrt{B^2 - A^2\,.\,(sin.\beta)^2},$$

stellt die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks dar, dessen Hypotenuse B (ST, Fig. 20, oder ST', Fig. 21) und dessen eine Kathete $A\,.\,sin.\beta$ ist. $A\,.\,sin.\beta$ ist aber das Perpendikel SO selbst.

$$\sqrt{B^2 - A^2\,(sin.\beta)^2}$$

ist demnach nichts anderes als die Entfernung des Fußpunktes O von T oder T'. Addirt man OT zu RO, so erhält man C der einen, zieht man diese Länge von RO ab, so erhält man C der zweiten Auflösung. Aus

dieser Betrachtung folgt auch, daß nur dann eine zweite Auflösung möglich ist, wenn $RO > TO$, also wenn $A\ cos.\beta > \sqrt{B^2 - A^2\ (sin.\beta)^2}$ oder wenn $A^2 (cos.\beta)^2 > B^2 - A^2 (sin.\beta)^2$; bringt man in dieser Gleichung $A^2\ (sin.\beta)^2$ auf die andere Seite, so kommt $A^2 (cos.\beta)^2 + A^2\ (sin.\beta)^2 > B^2$ oder $A^2 > B^2$; wir finden also hier für die Möglichkeit zweier Auflösungen dieselbe Bedingung wie früher. Wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck negativ wird, wenn also $B^2 < A^2\ (sin.\beta)^2$, d. h. wenn die gegebene Seite B kleiner ist als das von S auf B gefällte Perpendikel, so wird der Werth von C imaginär, die Auflösung ist unmöglich.

Wie groß sind die nicht gegebenen Stücke in folgenden Dreiecken?

A	B	β
12′	8′	36°
9′	10′	112°
19′	16′	104°

IV. Gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. Es sei gegeben die Seite A mit den Winkeln β und γ. Um α zu finden hat man nur $\beta + \gamma$ von 180° abzuziehen. Ist aber erst α bekannt, so findet man die Seiten B und C nach Gleichung (28), nämlich:

$$C = \frac{A\ .\ sin.\gamma}{sin.\alpha}$$

und

$$B = \frac{A\ .\ sin.\beta}{sin.\alpha}.$$

Es sei $A = 7$, $\gamma = 36^0$, $\beta = 74^0$, so ist $\alpha = 70^0$ und

$$C = \frac{7\ .\ sin. 36^0}{sin. 70}$$

$$B = \frac{7\ .\ sin. 74^0}{sin. 70^0}.$$

Wie groß sind die fehlenden Stücke in folgenden Dreiecken?

A	B	γ
64′	82′	42°
116′	98′	39°
8′	43′	111°

V. Gegeben zwei Seiten, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel.

Da zwei Winkel bekannt sind, so kann man leicht den dritten finden, und dann die fehlenden Seiten gerade ebenso berechnen, wie im vorigen Fall.

Wie groß sind die fehlenden Stücke in folgenden Dreiecken?

A	α	β
47′	61°	27°
63′	104°	42°
124′	54°	97°

22 **Anwendung der Logarithmen.** Weil die Anwendung der Logarithmen die trigonometrischen Rechnungen außerordentlich erleichtert, so hat man Tafeln entworfen, welche nicht die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel selbst, sondern ihre Logarithmen enthalten.

Sämmtliche Sinus und Cosinus sind kleiner als 1, die Logarithmen aller Sinus und Cosinus müssen deshalb negative Kennziffern haben. So ist z. B. $sin. 20^{0} = 0,342020$, und der Logarithme dieser Zahl also $log. sin. 20^{0} = 0,534052 - 1$. Auf diese Weise, d. h. mit negativen Kennziffern, finden sich aber die Logarithmen der trigonometrischen Linien nicht in den meisten Tafeln. Um die negative Kennziffer zu vermeiden, ist in den Tafeln die wahre Kennziffer um 10 vermehrt, so daß die positive Kennziffer 9 statt der negativen 1 in den Tafeln steht. So findet man also $log. sin. 20^{0} = 9,534052$. Es findet sich ferner in den Tafeln $log. cos. 85^{0} = 8,940296$; der wahre Logarithme von $cos. 85^{0}$ hat aber eine um 10 kleinere Kennziffer, er ist also $0,940296 - 2$.

Eben so sind auch in den Tafeln die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten um 10 vergrößert. Wenn also für $log. tang. 85^{0}$ in den Tafeln steht 11,058048, so ist der wahre Logarithme von $tang. 85^{0}$ gleich 1,058048. In den Tafeln steht $log. cotang. 77^{0} = 9,988724$, der wahre Logarithme von $cotang. 77^{0}$ ist also $0,988724 - 1$.

Gewöhnlich enthalten die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln die Logarithmen der trigonometrischen Linien von Minute zu Minute. Nun

kann man aber ohne merklichen Fehler annehmen, daß zwischen je zwei auf einander folgenden Minuten der Wachsthum der Logarithmen dem Wachsthum des Winkels proportional ist. So ist z. B. *log. sin.* 37° 24′ = 9,7834575 und *log. sin.* 37° 25′ = 9,7836227; während der Winkel um 1 Minute = 60″ wächst, nimmt der Logarithme des Sinus um 0,0001652 zu; nimmt der Winkel von 37° 24′ nur um 1″ zu, so wächst der Logarithme des Sinus um 1/60 von 0,0001652, d. h. um 0,0000002753; um also *log. sin.* 37° 41′ 1″ zu finden, hat man nur zum *log. sin.* 37° 24′ die in den Tafeln stehende Differenz für 1″, nämlich 27 . 53 so zu addiren, daß die Zahl 7 zur letzten, 2 zur vorletzten Decimalstelle des Logarithmus von *sin.* 37° 24′ addirt wird. Die Ziffern 53 kommen dann respective auf die achte und neunte Decimalstelle. Demnach ist *log.* 37° 24′ 1″ = 9,783460253 oder, wenn man nur 7 Decimalstellen berücksichtigt, 9,7835602. Ist *log. sin.* 37° 23′ 43″ zu bestimmen, so hat man zu *log. sin.* 37° 24′ die 43fache Differenz für 1″, also 43 × 27,53 = 1183,79 so zu addiren, daß 3 zur siebenten, 8 zur sechsten Decimalstelle addirt wird u. s. w. Man findet auf diese Weise *log.* 37° 24′ 43″ = 9,783575879 oder, wenn nur 7 Decimalstellen berücksichtigt werden sollen, 9,7835759.

Zur besseren Einübung folgt hier noch die Ausführung einiger anderen Beispiele.

Es sei zu bestimmen *log. tang.* 68° 18′ 32″. In den Tafeln steht

log. tang. 68° 18′ = 10,4001733.

Die Differenz für 1″ = 61,27, also für 32″, ist 32 × 61,27 = 1950,64. Diese Differenz zu *log. tang.* 68° 18′ addirt, kommt

log. tang. 68° 18′ 32″ = 10,400368364

oder

10,4003684,

wenn man nur 7 Decimalen berücksichtigt.

Ferner sei zu bestimmen *log. cos.* 19° 48′ 27″, in den Tafeln steht

log. cos. 19° 48′ = 9,5298638.

Die Differenz für 1″ ist gleich 58,46, die Differenz für 27″ ist also 27 . 58,46 = 1588,42. Diese Differenz ist von 9,5298638 abzuziehen, weil ja der Cosinus mit wachsendem Winkel kleiner wird.

Nach dem Gesagten ist es nun auch leicht, den zum Logarithmen einer trigonometrischen Linie gehörigen Winkel zu finden. Gesetzt, der Logarithme des Sinus eines Winkels α sei 9,6959374. In den Tafeln findet sich als Logarithme des nächst kleineren Sinus 9,6958922 und

dieser gehört dem Winkel von $29^0 46'$ an. Er ist von unserem verschieden um 452. Die Differenz für $1''$ ist 36,8, und mit dieser hat man in 452 zu dividiren, um die Zahl der Secunden zu finden, um welche der Winkel α größer ist als $29^0 46'$. Das Resultat dieser Division ist 12,2; der Winkel α ist also $29^0 46' 12{,}2''$.

Es sei ferner $log. cotang. \beta = 9{,}7394567$. In den Tafeln findet sich als der nächst kleinere Cotangenten-Logarithme 9,7392707, dieser ist von unserem verschieden um 1860 und gehört einem Winkel von $61^0 15'$ an. Wächst der Logarithme um 49,92, so nimmt der Winkel um $1''$ ab, einer Zunahme 1860 des Logarithmen entspricht demnach eine Abnahme von $\frac{1860}{49{,}92} = 37''$, der Winkel β ist also $61^0 15' - 37'' = 61^0 14' 23''$.

23 **Beispiele.** Zur Uebung folgt hier die Auflösung einiger trigonometrischen Aufgaben mit Hülfe der Logarithmen.

1. Wenn eine Seite A und die drei Winkel bekannt sind, hat man nach Gleichung (28)

$$B = \frac{A \,.\, sin. \beta}{sin. \alpha},$$

$$C = \frac{A \,.\, sin. \gamma}{sin. \alpha}.$$

Es sei $A = 3728$, $\alpha = 49^0$, $\beta = 102^0$, also $\gamma = 29^0$, so findet man B und C durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl}
log. A = & 3{,}5714759 \\
+\ log. sin. \beta = & \underline{9{,}9904044} \\
& 13{,}5618803 \\
-\ log. sin. \alpha = & \underline{9{,}8777799} \\
log. B = & 3{,}6841004 \\
B = & 4831{,}7 \ldots. \\
log. A = & 3{,}5714759 \\
+\ log. sin. \gamma = & \underline{9{,}6855712} \\
& 13{,}2570471 \\
-\ log. \alpha = & \underline{9{,}8777799} \\
log. C = & 3{,}3792672 \\
C = & 2394{,}7 \ldots.
\end{array}$$

Hier sind ohne Weiteres die um 10 zu großen Logarithmen von $sin. \alpha$, $sin. \beta$ und $sin. \gamma$ angewendet worden, ohne daß es Einfluß auf das Re-

sultat hätte, weil ein um 10 zu großer Logarithme zu A addirt, dann aber auch wieder ein um 10 zu großer Logarithme abgezogen worden ist.

2. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel γ. Man findet den Winkel β nach der Gleichung (30)

$$tang.\,\beta = \frac{B\, sin.\,\gamma}{A - B\,.\,cos.\,\gamma}.$$

Es sei $A = 3987$, $B = 2164$, $\gamma = 41^0$.

$$\begin{aligned}
log.\,B &= 3{,}3352573 \\
+\ log.\,sin.\,\gamma &= 9{,}8169429 \\
log.\,B\,.\,sin.\,\gamma &= 13{,}1522002 \\
-\ log.\,(A - B\,.\,cos.\,\gamma) &= 3{,}3718065 \\
log.\,tang.\,\beta &= 9{,}7803937 \\
\beta &= 31^0\,5'\,39'' \\
log.\,B &= 3{,}3352573 \\
+\ log.\,cos.\,\gamma &= 9{,}8777799 \\
log.\,B\,.\,cos.\,\gamma &= 3{,}2130372 \\
A &= 3987 \\
B\,.\,cos.\,\gamma &= 1633 \\
A - B\,.\,cos.\,\gamma &= 2354.
\end{aligned}$$

Wie der Logarithme des Zählers gefunden worden ist, bedarf keiner Erläuterung; eben so ist klar, daß der hier stehende Logarithme von $B\,.\,sin.\,\gamma$ eigentlich um 10 zu groß ist.

Die Addition unserer Werthe von $log.\,B$ und $log.\,cos.\,\gamma$ giebt uns einen um 10 zu großen Logarithmen von $B\,.\,cos.\,\gamma$. Um $B\,.\,cos.\,\gamma$ selbst zu finden, ist also der durch Addition gefundene Logarithme von $B\,.\,cos.\,\gamma$ erst um 10 zu verkleinern, was sogleich geschehen ist. Der gefundene Werth von $B\,.\,cos.\,\gamma$ wird von A abgezogen, um den Werth des Nenners zu finden; zu diesem Werthe wird der Logarithme gesucht und dieser vom Logarithmen des Zählers abgezogen, so findet man $log.\,tang.\,\beta$. Weil aber der Logarithme des Zählers, 13,1522002, um 10 zu groß ist, so ist auch der für $tang.\,\beta$ gefundene Werth von 10 zu groß, also gerade so, wie er in den Tafeln zu suchen ist.

Die fehlende Seite C könnte man nach der Formel $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\; cos.\,\gamma$ berechnen; weil diese Formel aber zum logarithmischen

Gebrauch sehr unbequem ist, so ist es besser, erst den Winkel β zu bestimmen, und dann C nach der Formel

$$C = \frac{B . sin. \gamma}{sin. \beta}$$

zu berechnen. $Log. B\ sin. \gamma$ ist schon bekannt, es ist

$$\begin{aligned} log. B\ sin. \gamma &= 13{,}1522002 \\ - log. sin. \beta &= 9{,}7130251 \\ \hline log. C &= 3{,}4391751 \\ C &= 2749. \end{aligned}$$

3. Gegeben zwei Seiten A und B und der Winkel β, welcher der einen von beiden gegenübersteht. Der Sinus des Winkels α wird gefunden durch die Gleichung

$$sin. \alpha = \frac{A . sin. \beta}{B}.$$

Es sei $A = 3648$, $B = 5394$ und $\beta = 82^0$.

$$\begin{aligned} log. A &= 3{,}5620548 \\ + log. sin. \beta &= 9{,}9957528 \\ \hline & 13{,}5578076 \\ - log. B &= 3{,}7319109 \\ \hline log. sin. \alpha &= 9{,}8258967 \\ \alpha &= 42^0\, 2'\, 45''. \end{aligned}$$

Der Logarithme 13,557 ... ist eigentlich um 10 zu groß, weil der Tafel-Logarithme von $sin. \beta$ es ist; daraus folgt nun auch, daß der für $sin. \alpha$ berechnete Logarithme um 10 zu groß ist, also gerade so gefunden worden, wie er in den Tafeln zu suchen ist.

Nachdem der Winkel α berechnet worden ist, kann man leicht den Winkel γ finden, weil $\gamma = 180^0 - \beta - \alpha$, in unserem Falle ergiebt sich

$$\gamma = 55^0\, 57'\, 15''.$$

Nun findet man am schnellsten C nach der Gleichung

$$C = \frac{A . sin. \gamma}{sin. \alpha}$$

$$\begin{aligned} log. A &= 3{,}5620548 \\ + log. sin. \gamma &= 9{,}9183183 \\ \hline & 13{,}4803731 \\ - log. sin. \alpha &= 9{,}8258967 \\ \hline log. C &= 3{,}6544764 \\ C &= 4513. \end{aligned}$$

4. Gegeben die drei Seiten. Man findet die fehlenden Winkel nach der Formel

$$cos.\,\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2\,B\,.\,C}.$$

Diese Formel ist indeß sehr unbequem zu logarithmischer Rechnung, man kann sie jedoch sehr leicht in eine andere verwandeln, welche bei Anwendung von Logarithmen rascher zum Ziele führt.

Es ist oben (Seite 16) gezeigt worden, daß

$$cos.\,2\,\alpha = 1 - 2.\,(sin.\,\alpha)^2,$$

daraus folgt

$$cos.\,\alpha = 1 - 2\,(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2,$$

wenn man α für $2\,\alpha$ setzt, daraus folgt

$$(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2 = \frac{1 - cos.\,\alpha}{2},$$

setzt man in diesen Werth von $(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2$ für $cos.\,\alpha$ seinen obigen Werth, so kommt

$$(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2 = \frac{(A + B - C)\,(A + C - B)}{4\,B\,C},$$

also

$$sin.\,{}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{(A + B - C)\,(A + C - B)}{4\,B\,C}}.$$

Nach dieser Formel ist α leicht durch logarithmische Rechnung zu finden. Es sei $A = 76'$, $B = 97'$, $C = 58'$, so ist

$$A + B - C = 115,\ A + C - B = 37.$$

$$\begin{array}{lr}
log.\,(A + B - C) = & 2{,}0606978 \\
+\ log.\,(A + C - B) = & 1{,}5682017 \\
\hline
 & 3{,}6288995 \\
-\ log.\,4 = & 0{,}6020600 \\
\hline
 & 3{,}0268395 \\
-\ log.\,B = & 1{,}9867717 \\
\hline
 & 1{,}0400678 \\
-\ log.\,C = & 1{,}7634280 \\
\hline
 & 0{,}2766398 - 1,
\end{array}$$

dies durch 2 dividirt, so kommt

$$log.\,sin.\,{}^1/_2\,\alpha = 0{,}6383199 - 1.$$

Diesen Logarithmen entspricht der Tafel-Logarithme 9,6383199, und zu diesem findet man in den Tafeln den Winkel

$$\frac{1}{2}\alpha = 25^\circ 46' 25'',$$

also

$$\alpha = 51^\circ 32' 50''.$$

Die Formeln, welche man anwendet, um die fehlenden Stücke des Dreiecks zu berechnen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, eignen sich freilich nicht sonderlich für logarithmische Rechnung; man hat deshalb die Formeln in andere umgewandelt, welche zu diesem Zwecke etwas passender sind; da jedoch die umgewandelten Formeln keinen großen Vortheil gewähren, so wollen wir diese Umwandlungen hier ganz übergehen.

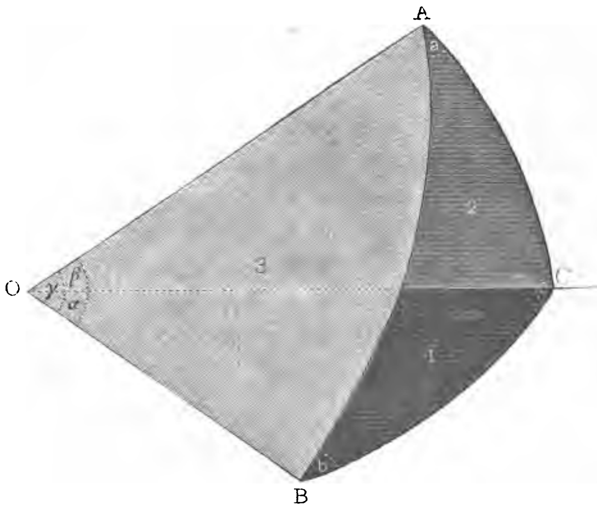
Zweites Buch.

Sphärische Trigonometrie.

Einleitung.

Ein durch drei Kanten gebildetes körperliches Eck ist ein sphärisches 24
Dreieck. Fig. 22 stellt ein solches sphärisches Dreieck dar, welches durch

Fig. 22.



die drei in O zusammentreffenden Kanten AO, CO und BO gebildet wird. In jeder Kante eines sphärischen Dreiecks schneiden sich zwei Ebenen. Der Winkel der beiden in AO sich schneidenden Ebenen AOC und AOB, die in der Figur mit 2 und 3 bezeichnet sind, sei mit a,

der Winkel der in der Kante OC sich schneidenden Ebenen 1 und 2 mit c, und der Winkel endlich der in OB sich schneidenden Ebenen 1 und 3 mit b bezeichnet. Diesen drei Winkeln a, b und c wollen wir den gemeinschaftlichen Namen **Flächenwinkel** geben.

Außer diesen drei Flächenwinkeln a, b und c kommen aber an einem sphärischen Dreieck noch drei andere vor, nämlich diejenigen, welche je zwei Kanten mit einander machen. Diese drei Kantenwinkel sind BOC, AOC und BOA. Es sei

$$\text{Winkel } BOC = \alpha,$$
$$\text{"} \quad AOC = \beta,$$
$$\text{"} \quad AOB = \gamma,$$

so also, daß jeder Kantenwinkel mit demjenigen griechischen Buchstaben bezeichnet ist, welcher dem lateinischen Buchstaben des gegenüberstehenden Flächenwinkels entspricht.

Es ist die **Aufgabe der sphärischen Trigonometrie die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen den drei Kantenwinkeln und den drei Flächenwinkeln bestehen, und mit Hülfe dieser Relationen, wenn drei Bestimmungsstücke eines sphärischen Dreiecks gegeben sind, die drei übrigen durch Rechnung zu finden.**

Gewöhnlich geht man nicht von der eben angegebenen, sondern von folgender Anschauungsweise des sphärischen Dreiecks aus.

Denkt man sich auf jeder der drei Ebenen, welche das körperliche Eck bilden, um die Spitze O als Mittelpunkt mit gleichem Radius Kreisbogen gezogen, so sind diese Kreisbogen AB, BC und CA offenbar den Kantenwinkeln γ, α und β proportional, oder mit anderen Worten: der Bogen AB mißt den Winkel γ, der Bogen AC den Winkel β, der Bogen BC den Winkel α. Diese drei Bogen heißen **Seiten** des sphärischen Dreiecks. Es ist leicht einzusehen, daß diese Seiten im Wesentlichen nichts anderes sind als die Kantenwinkel.

Denkt man sich das körperliche Eck so in eine Kugel gesteckt, daß die Spitze O in den Mittelpunkt zu liegen kommt, so schneiden die drei Ebenen 1, 2 und 3 die Kugeloberfläche in den Bogen AB, BC und CA; diese drei Bogen bilden ein auf der Kugeloberfläche liegendes Dreieck, daher der Name: **sphärische** Trigonometrie.

Bei den folgenden Entwickelungen wollen wir jedoch von der ersteren Betrachtungsweise des sphärischen Dreiecks als eines dreikantigen

körperlichen Ecks ausgehen, dessen ungeachtet aber der Kürze wegen die Flächenwinkel a, b, c nur Winkel, die Kantenwinkel α, β, γ Seiten des sphärischen Dreiecks nennen.

Da es für Manchen schwierig ist sich nach Zeichnungen zu richtigen Vorstellungen körperlicher Verhältnisse zu erheben, so sind diesem Werkchen die Netze der Figuren 23 und 24 beigegeben, welche zur Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie dienen. Diese Netze sind auf etwas stärkeres Papier aufzuziehen und nachdem die Gränzlinien vollständig durchgeschnitten sind, die ausgezogenen Linien (nicht die punktirten), welche im Innern der Figur liegen, so weit einzuschneiden, daß längs der eingeschnittenen Kanten ein leichtes Umbiegen möglich ist. Wie dann mit den so präparirten Netzen die in Fig. 23 und Fig. 24 dargestellten Körper vollendet werden, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Für den Unterricht ist es zweckmäßig solche Modelle in weit größerem Maaßstabe aus Pappendeckel und Glas herzustellen.

---

25 **Entwickelung der Grundformeln.** Bezeichnet man auf der einen Kante eines dreikantigen körperlichen Ecks einen Punkt A, Fig. 23,

Fig. 23.

so daß AO der Längeneinheit gleich ist, fällt man alsdann die Perpendikel AB und AC auf die beiden anderen Kanten, so ist

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sin.\gamma \\ OB &= \cos.\gamma \\ AC &= \sin.\beta \\ OC &= \cos.\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

da ja der Winkel AOB mit γ, und der Winkel AOC mit β bezeichnet worden ist.

Zieht man von B aus in der Ebene 1 eine Linie BL, welche auf der Kante OB rechtwinkelig steht, so ist der Winkel, den die Linien BA und BL mit einander machen, auch der Winkel der beiden in der Kante OB sich schneidenden Ebenen 1 und 3, der oben mit b bezeichnet wurde. Ebenso ist ACL der oben mit c bezeichnete Winkel der beiden in der Kante OC sich schneidenden Ebenen 1 und 2, wenn CL, in der Ebene 1 liegend, auf OC rechtwinkelig steht.

Legt man eine Ebene durch BA und BL, eine zweite Ebene durch CA und CL, so werden sich die beiden Ebenen in einer Linie AL schneiden, die auf der Ebene 1 rechtwinkelig steht. Daraus folgt dann, daß die Dreiecke BAL und CAL rechtwinkelig sind. Demnach ist aber

$$AL = BA \, sin. \mathrm{b}$$

und, wenn man für BA seinen Werth $sin. \gamma$ setzt,

$$AL = sin. \mathrm{b} \; sin. \gamma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Aber ebenso ergiebt sich aus dem rechtwinkeligen Dreieck CAL

$$AL = AC \, sin. \mathrm{c}$$

oder

$$AL = sin. \beta \; sin. \mathrm{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Setzt man die beiden Werthe von AL in (2) und (3) gleich, so kommt

$$sin. \mathrm{b} \; sin. \gamma = sin. \mathrm{c} \; sin. \beta$$

und daraus

$$sin. \mathrm{b} : sin. \mathrm{c} = sin. \beta : sin. \gamma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

oder in Worten: In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Wie schon oben (Gleichung 1) erwähnt wurde, ist $OC = cos. \beta$. Fällt man nun von B ein Perpendikel BM auf OC, so wird dadurch OC in zwei Theile OM und MC getheilt, es ist also

$$cos. \beta = OM + MC.$$

Nun aber ist

$$OM = OB \, . \, cos. \alpha = cos. \gamma \, . \, cos. \alpha$$

und

$$MC = NL = BL \, . \, sin. \alpha,$$

denn der Winkel LBN ist gleich α, weil jeder Schenkel desselben BN und BL auf einem Schenkel des Winkels α rechtwinkelig steht. Aus dem rechtwinkeligen Dreieck ABL aber folgt

$$BL = AB \, . \, cos. \mathrm{b} = sin. \gamma \, . \, cos. \mathrm{b} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

folglich ist

$$MC = sin.\gamma\,.\,sin.\alpha\,:cos.\mathrm{b}.$$

Setzt man in obigen Werth von $cos.\beta$ die eben gefundenen Werthe von OM und MC, so kommt

$$cos.\beta = cos.\alpha\,.\,cos.\gamma + sin.\alpha\,.\,sin.\gamma\,.\,cos.\mathrm{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dieser Gleichung analog ist auch

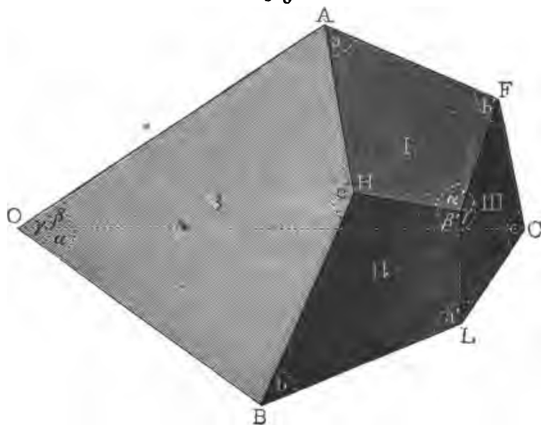
$$\left.\begin{array}{l} cos.\gamma = cos.\alpha\,.\,cos.\beta + sin.\alpha\,.\,sin.\beta\,.\,cos.\mathrm{c} \\ cos.\alpha = cos.\beta\,.\,cos.\gamma + sin.\beta\,.\,sin.\gamma\,.\,cos.\mathrm{a} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welches die zweite Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist.

Durch Anwendung der beiden Grundformeln (4) und (6) kann man alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie lösen, wenn man noch die Eigenschaften des Polardreiecks zu Hülfe nimmt, die im folgenden Paragraphen entwickelt werden sollen.

26 **Das Polardreieck.** Legt man durch irgend einen Punkt A, Fig. 24, der einen Kante des sphärischen Dreiecks eine Ebene I, welche rechtwinkelig auf AO steht, legt man ferner eine zweite Ebene II durch B rechtwinkelig auf BO, so werden sich die beiden Ebenen I und II in einer Kante HE (wegen Mangel an Raum fehlt E in der Figur) schneiden, die auf der Ebene 3 perpendikulär steht.

Fig. 24.



Legt man eine dritte Ebene III rechtwinkelig auf OC, so wird diese mit II sich in der Kante LE, mit I in der Kante FE schneiden. LE steht perpendikulär auf der Ebene I, FE auf II. Die drei Kanten HE, LE und FE bilden ein neues sphärisches Dreieck, dessen Spitze in E ist. Die Kanten- und Flächenwinkel dieses neuen sphärischen Dreiecks,

welches Polardreieck oder Complementardreieck heißen mag, bieten sehr wichtige Beziehungen zu denen des ursprünglichen dar.

Die Kantenwinkel des neuen sphärischen Dreiecks sind

$$HEL = \beta'$$
$$HEF = \alpha'$$
$$FEL = \gamma'.$$

Die Flächenwinkel sind

$$AHB = \mathrm{c}'$$
$$AFC = \mathrm{b}'$$
$$CLB = \mathrm{a}'$$

und zwar ist c′ der Winkel der Ebenen I und II, b′ der Winkel der Ebenen I und III, und a′ der Winkel der Ebenen II und III.

Betrachten wir das Viereck $HELB$, so finden wir in demselben zwei rechte Winkel, einen bei L und einen bei H. Der Winkel bei E ist der mit β' bezeichnete, der bei B der mit b bezeichnete. Da die vier Winkel eines Vierecks zusammen vier Rechte betragen, da ferner die Winkel bei H und der bei L zusammengenommen zwei Rechte betragen, so müssen die Winkel b und β' zusammen auch zwei Rechte sein, es ist also

$$\beta' = 180^0 - \mathrm{b}.$$

Ebenso ergiebt sich aus den Vierecken $HAEF$ und $FELC$

$$\alpha' = 180^0 - \mathrm{a}$$
$$\gamma' = 180^0 - \mathrm{c},$$

oder in Worten: Die Kantenwinkel des Polardreiecks sind die Complemente der entsprechenden Flächenwinkel des ursprünglichen sphärischen Dreiecks.

In dem Viereck $AOBH$ sind zwei rechte Winkel, einer bei A und einer bei B, mithin müssen die beiden anderen Winkel dieses Vierecks, γ und c′, zusammengenommen auch zwei Rechte machen; es ist also

$$\mathrm{c}' = 180^0 - \gamma$$

ebenso folgt aus der Betrachtung der Vierecke $AOCF$ und $BOCL$

$$\mathrm{b}' = 180^0 - \beta$$
$$\mathrm{a}' = 180^0 - \alpha,$$

oder in Worten: Die Flächenwinkel a′, b′, c′ des Polardreiecks sind die Complemente der entsprechenden Kantenwinkel (Seiten) α, β, γ des ursprünglichen.

Aus den eben angeführten Relationen folgt unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} sin.\, a' &= sin.\, \alpha \\ sin.\, b' &= sin.\, \beta \\ sin.\, c' &= sin.\, \gamma \\ cos.\, a' &= -\, cos.\, \alpha \\ cos.\, b' &= -\, cos.\, \beta \\ cos.\, c' &= -\, cos.\, \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\, \alpha' &= sin.\, a \\ sin.\, \beta' &= sin.\, b \\ sin.\, \gamma' &= sin.\, c \\ cos.\, \alpha' &= -\, cos.\, a \\ cos.\, \beta' &= -\, cos.\, b \\ cos.\, \gamma' &= -\, cos.\, c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

27 **Berechnung der fehlenden Stücke sphärischer Dreiecke.**

Wenn drei Elemente eines sphärischen Dreiecks bekannt sind, so kann man mit Hülfe der oben entwickelten Grundsätze die fehlenden Stücke berechnen. Die gegebenen Stücke können nun sein:

1. Die drei Seiten (Kantenwinkel).
2. Die drei Flächenwinkel.
3. Zwei Seiten und der eingeschlossene Flächenwinkel.
4. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
5. Zwei Seiten und der der einen gegenüberstehende Flächenwinkel.
6. Eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Flächenwinkel.

Wir wollen jetzt näher untersuchen, wie in jedem dieser sechs Fälle die fehlenden Stücke zu suchen sind.

Erster Fall. Gegeben die drei Seiten α, β und γ.

Hier sind die drei Flächenwinkel a, b und c zu suchen. Aus der zweiten Grundformel, Gleichung (6), ergiebt sich

$$cos.\, b = \frac{cos.\, \beta - cos.\, \alpha \,.\, cos.\, \gamma}{sin.\, \alpha \,.\, sin.\, \gamma} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Formel muß aber umgeformt werden, wenn sie sich für logarithmische Rechnung eignen soll. Es ist bekanntlich

$$cos.\, b = 1 - 2\,.\,(sin.\, {}^1\!/_2\, b)^2,$$

also

$$2\,(sin.\, {}^1\!/_2\, b)^2 = 1 - cos.\, b,$$

und wenn man für $cos. b$ den Werth bei (9) setzt,

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = {}^1/_2 \left(1 - \frac{cos. \beta - cos. \alpha \, . \, cos. \gamma}{sin. \alpha \, . \, sin. \gamma}\right)$$

oder

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = \frac{sin. \alpha \, . \, sin. \gamma + cos. \alpha \, . \, cos. \gamma - cos. \beta}{2 \, . \, sin. \alpha \, . \, sin. \gamma}.$$

Da aber $cos. \alpha \, . \, cos. \gamma + sin. \alpha \, . \, sin. \gamma = cos. (\alpha - \gamma)$, so ist auch

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = \frac{cos. (\alpha - \gamma) - cos. \beta}{2 \, . \, sin. \alpha \, . \, sin. \gamma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Der Zähler dieses Bruches enthält die Differenz zweier Cosinus. Diese Differenz muß aber in ein Product umgewandelt werden, was folgendermaßen geschieht. Es ist bekanntlich

$$cos. (x + y) = cos. x \, . \, cos. y - sin. x \, . \, sin. y$$
$$cos. (x - y) = cos. x \, . \, cos. y + sin. x \, . \, sin. y.$$

Zieht man die obere Gleichung von der anderen ab, so kommt

$$cos. (x - y) - cos. (x + y) = 2 \, . \, sin. x \, . \, sin. y \; . \quad (11)$$

Wir haben also hier eine Gleichung, in welcher die Differenz zweier Cosinus durch das Product zweier Sinus ausgedrückt ist. Soll diese Formel auf unsern Fall angewendet werden, so hat man x und y nur so zu bestimmen, daß

$$x - y = \alpha - \gamma$$
$$x + y = \beta$$

wird. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$x = {}^1/_2 \, (\beta + \alpha - \gamma)$$
$$y = {}^1/_2 \, (\beta + \gamma - \alpha);$$

substituirt man diese Werthe statt x und y in Gleichung (11), so kommt

$$cos. (\alpha - \gamma) - cos. \beta = 2 \, . \, sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \alpha - \gamma) \, sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \gamma - \alpha);$$

substituirt man endlich diesen Werth von $cos. (\alpha - \gamma) - cos. \beta$ in Gleichung (10), so kommt

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = \frac{sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \alpha - \gamma) \, . \, sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \gamma - \alpha)}{sin. \alpha \, . \, sin. \gamma} \quad . \quad (12)$$

welches eine für logarithmische Rechnung geeignete Formel ist.

Dieser Formel analog hat man auch

$$\left.\begin{aligned} (sin. \, {}^1/_2 \, a)^2 &= \frac{sin. \, {}^1/_2 \, (\alpha + \beta - \gamma) \, sin. \, {}^1/_2 \, (\alpha + \gamma - \beta)}{sin. \beta \, . \, sin. \gamma} \\ (sin. \, {}^1/_2 \, c)^2 &= \frac{sin. \, {}^1/_2 \, (\gamma + \beta - \alpha) \, sin. \, {}^1/_2 \, (\gamma + \alpha - \beta)}{sin. \beta \, . \, sin. \alpha} \end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

Als Beispiel zur Ausführung der Rechnung mag Folgendes dienen: Es sei $\alpha = 80^0$, $\beta = 104^0$, $\gamma = 62^0$, so ist

$$\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha - \gamma) = 61^0$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = 43^0$$

$$\begin{aligned}
log.\,sin.\,61^0 &= 9{,}9418193\\
log.\,sin.\,43^0 &= 9{,}8337833\\
&\quad 19{,}7756026\\
-\,log.\,sin.\,80^0 &= 9{,}9933515\\
&\quad 9{,}7822511\\
-\,log.\,sin.\,62^0 &= 9{,}9459349\\
log.\,(sin.\,\tfrac{1}{2}\,b)^2 &= \bar{1}{,}8363162\\
log.\,sin.\,\tfrac{1}{2}\,b &= \bar{1}{,}9181581\\
\tfrac{1}{2}\,b &= 55^0\,55'\,7{,}4''\\
b &= 111^0\,50'\,14{,}8''.
\end{aligned}$$

Ebenso ist auch a und c zu berechnen.

Zweiter Fall. Gegeben die drei Flächenwinkel a, b, c, gesucht die drei Seiten α, β, γ.

Zur Lösung dieser Aufgabe muß man das Polardreieck zu Hülfe nehmen. Statt β zu bestimmen, sucht man nur den Flächenwinkel b′ des Polardreiecks nach Gleichung (9); man findet

$$cos.\,b' = \frac{cos.\,\beta' - cos.\,\alpha' \,.\, cos.\,\gamma'}{sin.\,\alpha' \,.\, sin.\,\gamma'}.$$

Da aber die Winkel α', β', γ' Complemente der gegebenen Winkel a, b, c sind, so kann man $cos.\,\alpha'$ mit $-\,cos.\,a$, $cos.\,\beta'$ mit $-\,cos.\,b$, und $cos.\,\gamma'$ mit $-\,cos.\,c$, und ferner noch die Sinus von α' und γ' mit den Sinus von a und c vertauschen (Gleichung 8), und so erhält man

$$cos.\,b' = -\,\frac{cos.\,b + cos.\,a \,.\, cos.\,c}{sin.\,a \,.\, sin.\,c}.$$

Es ist aber auch $cos.\,b' = -\,cos.\,\beta$, folglich

$$cos.\,\beta = \frac{cos.\,b + cos.\,a \,.\, cos.\,c}{sin.\,a \,.\, sin.\,c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Diese Formel ist gerade so wie die oben für $cos.\,b$ gefundene zum Behuf logarithmischer Rechnung umzuformen.

Weil

$$2\,.\,(sin.\,\tfrac{1}{2}\,\beta)^2 = 1 - cos.\,\beta,$$

so hat man auch

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = 1 - \frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}$$

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = \frac{sin.\,a\,.\,sin.\,c - cos.\,a\,.\,cos.\,c - cos.\,b}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}$$

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = -\frac{cos.\,(a + c) + cos.\,b}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Summe der beiden Cosinus im Zähler ist noch in ein Product zu verwandeln. Addirt man die beiden Gleichungen

$$cos.\,(x + y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y - sin.\,x\,.\,sin.\,y$$
$$cos.\,(x - y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y + sin.\,x\,.\,sin.\,y,$$

so kommt

$$cos.\,(x + y) + cos.\,(x - y) = 2\,cos.\,x\,.\,cos.\,y.$$

Soll nun $x + y = a + c$ und $x - y = b$ sein, so muß

$$x = {}^1/_2\,(a + b + c)$$
$$y = {}^1/_2\,(a + c - b)$$

gesetzt werden; substituirt man diese Werthe von x und y in die vorige Gleichung, so kommt

$$cos.\,(a + c) + cos.\,b = 2\,.\,cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\,cos.\,{}^1/_2\,(a + c - b),$$

und wenn man diesen Werth für die Summe der beiden Cosinus in Gleichung (14) setzt,

$$(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = -\frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(a + c - b)}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad . \quad (15)$$

Die Ausführung der logarithmischen Rechnung ist der Berechnung nach Gleichung (13) so ähnlich, daß sie wohl keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf. Für die Bestimmungen der Winkel α und γ hat man analog der Gleichung (15) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(sin.\,{}^1/_2\alpha)^2 &= \frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(b + c - a)}{sin.\,b\,.\,sin.\,c}\\ (sin.\,{}^1/_2\gamma)^2 &= \frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(a + b - c)}{sin.\,a\,.\,sin.\,b}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

Dritter Fall. Gegeben zwei Seiten (etwa α und γ) und der eingeschlossene Flächenwinkel (b). Es kann hier gefragt werden 1. nach dem dritten Kantenwinkel (der dritten Seite) β, und 2. nach den fehlenden Winkeln a und c. Es sind also hier zwei gesonderte Aufgaben zu lösen.

1. Wenn die Seite β gesucht ist, so giebt Gleichung (6) unmittelbar

$$cos.\,\beta = cos.\,\alpha\,.\,cos.\,\gamma + sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\gamma\,.\,cos.\,b.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin. a' = \sin. \alpha \\ \sin. b' = \sin. \beta \\ \sin. c' = \sin. \gamma \\ \\ \cos. a' = - \cos. \alpha \\ \cos. b' = - \cos. \beta \\ \cos. c' = - \cos. \gamma \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin. \alpha' = \sin. a \\ \sin. \beta' = \sin. b \\ \sin. \gamma' = \sin. c \\ \\ \cos. \alpha' = - \cos. a \\ \cos. \beta' = - \cos. b \\ \cos. \gamma' = - \cos. c \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

27 **Berechnung der fehlenden Stücke sphärischer Dreiecke.** Wenn drei Elemente eines sphärischen Dreiecks bekannt sind, so kann man mit Hülfe der oben entwickelten Grundsätze die fehlenden Stücke berechnen. Die gegebenen Stücke können nun sein:

1. Die drei Seiten (Kantenwinkel).
2. Die drei Flächenwinkel.
3. Zwei Seiten und der eingeschlossene Flächenwinkel.
4. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
5. Zwei Seiten und der der einen gegenüberstehende Flächenwinkel.
6. Eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Flächenwinkel.

Wir wollen jetzt näher untersuchen, wie in jedem dieser sechs Fälle die fehlenden Stücke zu suchen sind.

Erster Fall. Gegeben die drei Seiten α, β und γ.

Hier sind die drei Flächenwinkel a, b und c zu suchen. Aus der zweiten Grundformel, Gleichung (6), ergiebt sich

$$\cos. b = \frac{\cos. \beta - \cos. \alpha \,.\, \cos. \gamma}{\sin. \alpha \,.\, \sin. \gamma} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Diese Formel muß aber umgeformt werden, wenn sie sich für logarithmische Rechnung eignen soll. Es ist bekanntlich

$$\cos. b = 1 - 2 \,.\, (\sin. {}^1\!/_2\, b)^2,$$

also

$$2 (\sin. {}^1\!/_2\, b)^2 = 1 - \cos. b,$$

und wenn man für $cos. b$ den Werth bei (9) setzt,

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = {}^1/_2 \left(1 - \frac{cos. \beta - cos. \alpha \, . \, cos. \gamma}{sin. \alpha \, . \, sin. \gamma}\right)$$

oder

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = \frac{sin. \alpha \, . \, sin. \gamma + cos. \alpha \, . \, cos. \gamma - cos. \beta}{2 \, . \, sin. \alpha \, . \, sin. \gamma}.$$

Da aber $cos. \alpha \, . \, cos. \gamma + sin. \alpha \, . \, sin. \gamma = cos. (\alpha - \gamma)$, so ist auch

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = \frac{cos. (\alpha - \gamma) - cos. \beta}{2 \, . \, sin. \alpha \, . \, sin. \gamma} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Der Zähler dieses Bruches enthält die Differenz zweier Cosinus. Diese Differenz muß aber in ein Product umgewandelt werden, was folgendermaßen geschieht. Es ist bekanntlich

$$cos. (x + y) = cos. x \, . \, cos. y - sin. x \, . \, sin. y$$
$$cos. (x - y) = cos. x \, . \, cos. y + sin. x \, . \, sin. y.$$

Zieht man die obere Gleichung von der anderen ab, so kommt

$$cos. (x - y) - cos. (x + y) = 2 \, . \, sin. x \, . \, sin. y \, . \quad (11)$$

Wir haben also hier eine Gleichung, in welcher die Differenz zweier Cosinus durch das Product zweier Sinus ausgedrückt ist. Soll diese Formel auf unsern Fall angewendet werden, so hat man x und y nur so zu bestimmen, daß

$$x - y = \alpha - \gamma$$
$$x + y = \beta$$

wird. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$x = {}^1/_2 \, (\beta + \alpha - \gamma)$$
$$y = {}^1/_2 \, (\beta + \gamma - \alpha);$$

substituirt man diese Werthe statt x und y in Gleichung (11), so kommt

$$cos. (\alpha - \gamma) - cos. \beta = 2 \, . \, sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \alpha - \gamma) \, sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \gamma - \alpha);$$

substituirt man endlich diesen Werth von $cos. (\alpha - \gamma) - cos. \beta$ in Gleichung (10), so kommt

$$(sin. \, {}^1/_2 \, b)^2 = \frac{sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \alpha - \gamma) \, . \, sin. \, {}^1/_2 \, (\beta + \gamma - \alpha)}{sin. \alpha \, . \, sin. \gamma} \quad . \quad (12)$$

welches eine für logarithmische Rechnung geeignete Formel ist.

Dieser Formel analog hat man auch

$$\left.\begin{aligned} (sin. \, {}^1/_2 \, a)^2 &= \frac{sin. \, {}^1/_2 \, (\alpha + \beta - \gamma) \, sin. \, {}^1/_2 \, (\alpha + \gamma - \beta)}{sin. \beta \, . \, sin. \gamma} \\ (sin. \, {}^1/_2 \, c)^2 &= \frac{sin. \, {}^1/_2 \, (\gamma + \beta - \alpha) \, sin. \, {}^1/_2 \, (\gamma + \alpha - \beta)}{sin. \beta \, . \, sin. \alpha} \end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

Als Beispiel zur Ausführung der Rechnung mag Folgendes dienen: Es sei $\alpha = 80^0$, $\beta = 104^0$, $\gamma = 62^0$, so ist

$$\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha - \gamma) = 61^0$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = 43^0$$

$$\begin{aligned}
log.\,sin.\,61^0 &= 9{,}9418193 \\
log.\,sin.\,43^0 &= \underline{9{,}8337833} \\
&\ 19{,}7756026 \\
-\,log.\,sin.\,80^0 &= \underline{9{,}9933515} \\
&\ 9{,}7822511 \\
-\,log.\,sin.\,62^0 &= \underline{9{,}9459349} \\
log.\,(sin.\,\tfrac{1}{2}\,b)^2 &= \bar{1}{,}8363162 \\
log.\,sin.\,\tfrac{1}{2}\,b &= \bar{1}{,}9181581 \\
\tfrac{1}{2}\,b &= 55^0\,55'\ 7{,}4'' \\
b &= 111^0\,50'\,14{,}8''.
\end{aligned}$$

Ebenso ist auch a und c zu berechnen.

Zweiter Fall. Gegeben die drei Flächenwinkel a, b, c, gesucht die drei Seiten α, β, γ.

Zur Lösung dieser Aufgabe muß man das Polardreieck zu Hülfe nehmen. Statt β zu bestimmen, sucht man nur den Flächenwinkel b' des Polardreiecks nach Gleichung (9); man findet

$$cos.\,b' = \frac{cos.\,\beta' - cos.\,\alpha'\,.\,cos.\,\gamma'}{sin.\,\alpha'\,.\,sin.\,\gamma'}.$$

Da aber die Winkel α', β', γ' Complemente der gegebenen Winkel a, b, c sind, so kann man $cos.\,\alpha'$ mit $-\,cos.\,a$, $cos.\,\beta'$ mit $-\,cos.\,b$, und $cos.\,\gamma'$ mit $-\,cos.\,c$, und ferner noch die Sinus von α' und γ' mit den Sinus von a und c vertauschen (Gleichung 8), und so erhält man

$$cos.\,b' = -\,\frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}.$$

Es ist aber auch $cos.\,b' = -\,cos.\,\beta$, folglich

$$cos.\,\beta = \frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Diese Formel ist gerade so wie die oben für $cos.\,b$ gefundene zum Behuf logarithmischer Rechnung umzuformen.

Weil

$$2\,.\,(sin.\,\tfrac{1}{2}\,\beta)^2 = 1 - cos.\,\beta,$$

so hat man auch

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = 1 - \frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}$$

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = \frac{sin.\,a\,.\,sin.\,c - cos.\,a\,.\,cos.\,c - cos.\,b}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}$$

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = -\frac{cos.\,(a + c) + cos.\,b}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Die Summe der beiden Cosinus im Zähler ist noch in ein Product zu verwandeln. Addirt man die beiden Gleichungen

$$cos.\,(x + y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y - sin.\,x\,.\,sin.\,y$$
$$cos.\,(x - y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y + sin.\,x\,.\,sin.\,y,$$

so kommt

$$cos.\,(x + y) + cos.\,(x - y) = 2\,cos.\,x\,.\,cos.\,y.$$

Soll nun $x + y = a + c$ und $x - y = b$ sein, so muß

$$x = {}^1/_2\,(a + b + c)$$
$$y = {}^1/_2\,(a + c - b)$$

gesetzt werden; substituirt man diese Werthe von x und y in die vorige Gleichung, so kommt

$$cos.\,(a + c) + cos.\,b = 2\,.\,cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\,cos.\,{}^1/_2\,(a + c - b),$$

und wenn man diesen Werth für die Summe der beiden Cosinus in Gleichung (14) setzt,

$$(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = -\frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\,cos.\,{}^1/_2\,(a + c - b)}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad . \quad (15)$$

Die Ausführung der logarithmischen Rechnung ist der Berechnung nach Gleichung (13) so ähnlich, daß sie wohl keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf. Für die Bestimmungen der Winkel α und γ hat man analog der Gleichung (15) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(sin.\,{}^1/_2\alpha)^2 &= \frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(b + c - a)}{sin.\,b\,.\,sin.\,c}\\ (sin.\,{}^1/_2\gamma)^2 &= \frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(a + b - c)}{sin.\,a\,.\,sin.\,b}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15)$$

Dritter Fall. Gegeben zwei Seiten (etwa α und γ) und der eingeschlossene Flächenwinkel (b). Es kann hier gefragt werden 1. nach dem dritten Kantenwinkel (der dritten Seite) β, und 2. nach den fehlenden Winkeln a und c. Es sind also hier zwei gesonderte Aufgaben zu lösen.

1. Wenn die Seite β gesucht ist, so giebt Gleichung (6) unmittelbar

$$cos.\,\beta = cos.\,\alpha\,.\,cos.\,\gamma + sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\gamma\,.\,cos.\,b.$$

Es sei z. B. $\alpha = 64^0$, $\gamma = 51^0$, $b = 82^0$, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rlrl} log. cos. 64^0 = & 9{,}6418420 & log. sin. 64^0 = & 9{,}9536602 \\ log. cos. 51^0 = & \underline{9{,}7988718} & log. sin. 51^0 = & 9{,}8905026 \\ & \bar{1}{,}4407138 & log. cos. 82^0 = & \underline{9{,}1435553} \\ & & & \bar{2}{,}9877181 \end{array}$$

$$\begin{aligned} cos. 64^0,\ cos. 51^0 &= 0{,}2758759 \\ sin. 64^0,\ sin. 51^0\ cos. 82^0 &= \underline{0{,}0972116} \\ cos. \beta &= 0{,}3730875 \\ \beta &= 68^0 5' 38''. \end{aligned}$$

Es wird wohl klar sein, warum man nach Addition von $log. cos. 64^0$ und $log. cos. 51^0$ nicht die unmittelbar erhaltene Kennziffer 19, sondern $\bar{1}$, und warum man bei der folgenden Addition nicht die unmittelbar erhaltene Kennziffer 28, sondern $\bar{2}$ genommen hat! (Ebene Trigonometrie §. 22.)

Man sieht wohl aus dieser Ausführung der Rechnung, daß diese Formel für die Anwendung der Logarithmen nicht sonderlich bequem ist. Nach siebenmaligem Aufschlagen erhält man $cos. \beta$. Hat man nun Tafeln, welche die Sinus und Cosinus selbst von Minute zu Minute enthalten, so ist die Rechnung nach achtmaligem Aufschlagen fertig, hat man jedoch solche Tafeln nicht, so muß man zu dem gefundenen Werth von $cos. \beta$ erst noch den Logarithmen, und zu diesem erst den Winkel aufsuchen; man kommt also erst nach neunmaligem Aufschlagen zum Ziel. Die Gleichung (6) läßt sich jedoch umformen. Setzt man $cos. \gamma\ tang. \gamma$ statt $sin. \gamma$, so kommt

$$cos. \beta = cos. \alpha . cos. \gamma + sin. \alpha . cos. \gamma . tang. \gamma . cos. b$$
$$cos. \beta = cos. \gamma\ (cos. \alpha + sin. \alpha . tang. \gamma . cos. b),$$

setzt man nun

$$tang. \varrho = cos. b . tang. \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

so kommt

$$cos. \beta = cos. \gamma\ (cos. \alpha + sin. \alpha . tang. \varrho)$$

$$cos. \beta = \frac{cos. \gamma}{cos. \varrho}\ (cos. \alpha . cos. \varrho + sin. \alpha . sin. \varrho)$$

$$cos. \beta = \frac{cos. \gamma}{cos. \varrho}\ cos. (\alpha - \varrho) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Hat man mit Hülfe von Gleichung (17) den Werth des Hülfswinkels ϱ

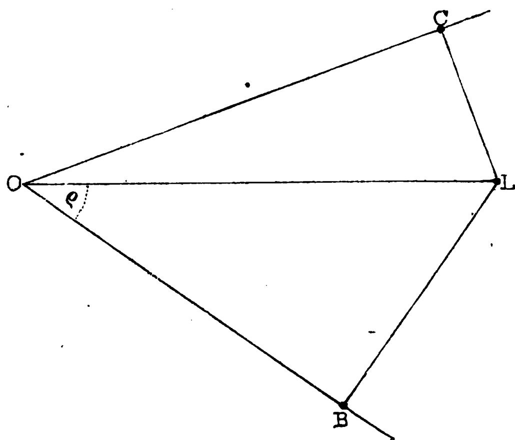
gefunden, so findet man β leicht nach Gleichung (16). Nehmen wir das oben nach Gleichung (6) berechnete Beispiel. Es sei also $\alpha = 64^0$, $\gamma = 51^0$, b $= 82^0$.

$$\begin{aligned}
log.\,cos.\,\mathrm{b} &= 9{,}1435553 \\
log.\,tang.\,\gamma &= 10{,}0916308 \\
\hline
log.\,tang.\,\varrho &= 9{,}2351861 \\
\varrho &= 9^0\,45'\;6{,}6'' \\
\alpha - \varrho &= 54^0\,14'\,53{,}4'' \\
log.\,cos.\,\gamma &= 9{,}7988718 \\
log.\,cos.\,\varrho &= 8{,}9936789 \\
\hline
& \bar{1}{,}8051929 \\
+\; log.\,cos.\,(\alpha - \varrho) &= 9{,}7666179 \\
\hline
log.\,cos.\,\beta &= 9{,}5718108 \\
\beta &= 68^0\,5'\,38''.
\end{aligned}$$

Hier ist die Aufgabe nach siebenmaligem Aufschlagen gelöst.

Die Formeln (16) und (17) lassen sich auch unmittelbar aus der Betrachtung der Figur ableiten. Man denke sich in Fig. 23, Seite 52, eine Linie von L nach O gezogen, so wird der Winkel α in zwei Theile

Fig. 25.



COL und LOB getheilt. Um nicht durch die perspectivische Zeichnung der Fig. 23 und die in der Figur enthaltenen nicht zu dieser Betrachtung gehörigen Linien irre zu machen, seien in Fig. 25 die Ebene 1 mit den zu dieser Betrachtung gehörigen Linien unverkürzt dargestellt.

Die Buchstaben O, C, B und L bezeichnen in Fig. 23 und in Fig. 25 dieselben Punkte. Der Winkel COB, Fig. 25, ist der bisher stets mit α bezeichnete. Bezeichnet man nun den Winkel BOL mit ϱ, so ist leicht die Tangente des Winkels ϱ zu bestimmen, denn es ist

$$tang.\,\varrho = \frac{BL}{BO}.$$

Nun aber ist $BL = sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}$ (Gleichung 5) und $BO = cos.\,\gamma$ (Gleichung 1), also

$$tang.\,\varrho = \frac{cos.\,\mathrm{b}\,.\,sin.\,\gamma}{cos.\,\gamma} = cos.\,\mathrm{b}\,.\,tang.\,\gamma.$$

Ist nun ϱ bekannt, so findet man leicht OL als Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks OBL, denn es ist

$$OL = \frac{OB}{cos.\,\varrho} = \frac{cos.\,\gamma}{cos.\,\varrho}.$$

Um aber endlich OC oder den Werth von $cos.\,\beta$ zu finden, hat man nur die Hypotenuse OL mit dem Cosinus des Winkels LOC, welcher $\alpha - \varrho$ ist, zu multipliciren. Man hat also

$$cos.\,\beta = OL\,.\,cos.\,(\alpha - \varrho)$$

$$cos.\,\beta = \frac{cos.\,\gamma}{cos.\,\varrho}\,cos.\,(\alpha - \varrho).$$

Ist einmal β berechnet, sind also die drei Seiten α, β und γ bekannt, so kann man die noch fehlenden Winkel a und c des dritten Falles leicht durch Anwendung der Formel (12) finden; allein es läßt sich auch eine Formel finden, um a und c direct zu berechnen.

Um c zu berechnen, muß man offenbar eine Gleichung haben, in welcher die bekannten Größen α, γ und b nebst c vorkommen. Keine der Grundgleichungen leistet dieser Forderung Genüge. Um eine Gleichung zu erhalten, welche b und c enthält, verbinde man die erste der Gleichungen (6) mit der zweiten, in dem man den Werth von $cos.\,\beta$ aus der ersten in die zweite setzt; es kommt alsdann

$$cos.\,\gamma = (cos.\,\alpha)^2\,cos.\,\gamma + sin.\,\alpha\,cos.\,\mathrm{a}\,.\,sin.\,\gamma\,cos.\,\mathrm{b} + sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\beta\,.\,cos.\,\mathrm{c}.$$

Setzt man nun für $(cos.\,\alpha)^2$ seinen Werth $1 - (sin.\,\alpha)^2$, so hebt sich $cos.\,\gamma$ auf beiden Seiten, alles Uebrige läßt sich durch den gemeinschaftlichen Factor $sin.\,\alpha$ dividiren, und man erhält so die Gleichung

$$sin.\,\alpha\,.\,cos.\,\gamma = cos.\,\alpha\,.\,sin.\,\gamma\,cos.\,\mathrm{b} + sin.\,\beta\,cos.\,\mathrm{c}.$$

Diese Gleichung enthält aber noch die unbekannte Größe $sin.\,\beta$; es ist aber nach Gleichung (4)

$$sin.\beta = \frac{sin.\gamma\,.\,sin.\mathrm{b}}{sin.\mathrm{c}};$$

setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung, dividirt man alsdann mit $sin.\gamma$, so kommt

$$sin.\alpha\,.\,cotang.\gamma = cos.\alpha\,.\,cos.\mathrm{b} + sin.\mathrm{b}\; cotang.\mathrm{c}$$

oder

$$\frac{sin.\alpha\,.\,cos.\mathrm{b}}{tang.\gamma\; cos.\mathrm{b}} = cos.\alpha\,.\,cos.\mathrm{b} + sin.\mathrm{b}\,.\,cotang.\mathrm{c};$$

setzt man nun

$$tang.\gamma\,.\,cos.\mathrm{b} = tang.\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{sin.\alpha\,.\,cos.\mathrm{b}}{tang.\varrho} = cos.\alpha\,.\,cos.\mathrm{b} + sin.\mathrm{b}\,.\,cotang.\mathrm{c}$$

und daraus

$$cotang.\mathrm{c} = cotang.\mathrm{b}\left(\frac{sin.\alpha}{tang.\varrho} - cos.\alpha\right)$$

$$cotang.\mathrm{c} = \frac{cotang.\mathrm{b}}{sin.\varrho}\,(sin.\alpha\; cos.\varrho - cos.\alpha\,.\,sin.\varrho)$$

$$tang.\mathrm{c} = \frac{tang.\mathrm{b}}{sin.(\alpha - \varrho)}\, sin.\varrho \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Hat man nach Formel (18) den Winkel ϱ gefunden, so giebt Gleichung (19) den Winkel c. Die Ausführung der Rechnung ist der oben (§. 26) gemachten so ähnlich, daß sie wohl keines besonderen Beispiels bedarf.

Zur Berechnung des Winkels a hat man analog die Gleichungen (18) und (19)

$$\left.\begin{aligned} tang.\mathrm{a} &= \frac{tang.\mathrm{b}}{tang.(\gamma - \varrho)}\, sin.\varrho \\ tang.\varrho &= tang.\alpha\,.\,cos.b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Die Formeln (18) und (19) hätten noch weit leichter unmittelbar aus der Figur entwickelt werden können. Man findet die Tangente des Winkels c (Winkel LCA, Fig. 23), indem man AL durch LC dividirt, also

$$tang.\mathrm{c} = \frac{AL}{LC}.$$

Es ist aber nach Gleichung (3) $AL = sin.\gamma\,.\,sin.\mathrm{b}$. Es ist ferner $LC = OL\,.\,sin.(\alpha - \varrho)$, wenn ϱ dieselbe Bedeutung wie in §. 26 behält.

Für OL läßt sich substituiren $\frac{LB}{sin.\,\varrho}$ oder $\frac{sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}}{sin.\,\varrho}$, also

$$LC = \frac{sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}\,.\,sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,\varrho},$$

und endlich, wenn man für AL und LC ihre Werthe setzt,

$$tang.\,\mathrm{c} = sin.\,\gamma\,.\,sin.\,\mathrm{b}\,.\,\frac{sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}\,.\,sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,\varrho}$$

oder

$$tang.\,\mathrm{c} = \frac{tang.\,\mathrm{b}}{sin.\,(\alpha - \varrho)}\,sin.\,\varrho.$$

Zur Berechnung des Hülfswinkels ϱ hat man wie oben §. 26 die Gleichung

$$tang.\,\varrho = cos.\,\mathrm{b}\,.\,tang.\,\gamma.$$

Vierter Fall. Gegeben eine Seite (etwa γ) und die beiden anliegenden Winkel (a und b). Die fehlenden Stücke sind die beiden Seiten α und β und der dritte Winkel c. Diese fehlenden Stücke finden wir durch Zuziehung des Polardreiecks; durch γ, a und b sind die Größen c', α' und β' bekannt. Der Gleichung (16) und (17) ganz analog hat man aber

$$tang.\,\psi = cos.\,\mathrm{c}'\,.\,tang.\,\beta'$$

und

$$cos.\,\gamma' = \frac{cos.\,\beta'}{cos.\,\psi}\,cos.\,(\alpha' - \psi).$$

Nun aber läßt sich wegen der Eigenschaften des Polardreiecks $cos.\,\gamma'$ mit $-\,cos.\,\mathrm{c}$, $cos.\,\beta'$ mit $-\,cos.\,\mathrm{b}$, $cos.\,\mathrm{c}'$ mit $-\,cos.\,\gamma$, $tang.\,\beta'$ mit $-\,tang.\,\mathrm{b}$, α' mit $180^0 - \mathrm{a}$ vertauschen, und so erhält man

$$cos.\,\mathrm{c} = \frac{cos.\,\mathrm{b}}{cos.\,\psi}\,.\,cos.\,(180^0 - \mathrm{a} - \psi)$$

oder

$$cos.\,\mathrm{c} = -\frac{cos.\,\mathrm{b}}{cos.\,\psi}\,.\,cos.\,(\mathrm{a} + \psi)$$

und

$$tang.\,\psi = cos.\,\gamma\,.\,tang.\,\mathrm{b}.$$

Will man das negative Zeichen im Werth von $cos.\,\mathrm{c}$ vermeiden, so setze man nur $90^0 - \varphi$ statt ψ, so hat man

$$\left.\begin{aligned} cotang.\,\varphi &= cos.\,\gamma\,.\,tang.\,\mathrm{b} \\ \text{und} \quad cos.\,\mathrm{c} &= \frac{cos.\,\mathrm{b}}{sin.\,\varphi}\,.\,sin.\,(\mathrm{a} - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (21)$$

Durch diese Gleichungen ist der dritte Winkel bestimmt. Gehen wir nun zur Aufsuchung einer Formel über, mit Hülfe deren die fehlenden Seiten berechnet werden können.

Wenden wir die Gleichung (20) auf das Polardreieck an, so hat man

$$tang.\, a' = \frac{tang.\, c'}{sin.\, (\beta' - \psi)}\, sin.\, \psi$$

und

$$tang.\, \psi = cos.\, c' . tang.\, \alpha',$$

indem man in denselben b mit c und γ mit β vertauscht und dann kommatisirt. Vertauscht man nun in diesen Gleichungen, wie man es wegen der Eigenschaften des Polardreiecks thun kann, *tang.* a' mit — *tang.* α, *tang.* c' mit — *tang.* γ, β mit 180^0 — b, *cos.* c' mit — *cos.* o, so kommt

$$- tang.\, \alpha = - \frac{tang.\, \gamma}{sin.\, (180^0 - b - \psi)}\, sin.\, \psi$$

oder

$$\left.\begin{aligned} tang.\, \alpha &= \frac{tang.\, \gamma}{sin.\, (b + \psi)}\, sin.\, \psi \\ \text{und} \quad & \\ tang.\, \psi &= cos.\, \gamma\, .\, tang.\, a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Diesen Formeln analog hat man zur Bestimmung der Seite β

$$\left.\begin{aligned} tang.\, \psi &= cos.\, \gamma\, .\, tang.\, b \\ tang.\, \beta &= \frac{tang.\, \gamma}{sin.\, (a + \psi)}\, .\, sin.\, \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Fünfter Fall. Gegeben zwei Seiten (β und γ) und der der einen gegenüberstehende Winkel (b). Hier kann gefragt werden 1. nach dem der anderen Seite gegenüberliegenden Winkel c, 2. nach der dritten Seite α, und 3. nach dem eingeschlossenen Winkel a. Um die erste Frage zu beantworten, hat man die Gleichung

$$sin.\, \beta : sin.\, \gamma = sin.\, b : sin.\, c,$$

woraus folgt

$$sin.\, c = \frac{sin.\, \gamma}{sin.\, \beta}\, sin.\, b.$$

Zur Berechnung der Seite α kann man unmittelbar die Gleichungen (16) und (17) anwenden. Gleichung (17) giebt

$$cos.\, (\alpha - \varrho) = \frac{cos.\, \beta\, .\, cos.\, \varrho}{cos.\, \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Der Hülfswinkel ϱ ist aber durch die Gleichung

$$tang.\, \varrho = cos.\, b\, .\, tang.\, \gamma$$

gegeben. Hat man aber ϱ und $\alpha - \varrho$ berechnet, so findet man auch leicht α selbst.

Um den eingeschlossenen Winkel a zu berechnen, nehmen wir die Gleichungen (23)

$$tang.\,\psi = tang.\,\mathrm{b}\ cos.\,\gamma$$

$$sin.\,(\mathrm{a} + \varrho) = \frac{tang.\,\gamma}{tang.\,\beta}\ sin.\,\psi.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt ψ, die zweite $\mathrm{a} + \psi$, wonach man leicht a selbst finden kann.

Sechster Fall. Gegeben zwei Winkel (b und c) und die dem einen gegenüberstehende Seite (γ). Auch hier sind drei Aufgaben zu lösen: 1. ist zu suchen die dem zweiten gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite β, 2. die eingeschlossene Seite α, 3. der dritte Winkel a. Die Seite β findet man durch die Gleichung

$$sin.\,\mathrm{c} : sin.\,\mathrm{b} = sin.\,\gamma : sin.\,\beta,$$

woraus folgt

$$sin.\,\beta = \frac{sin.\,\mathrm{b}}{sin.\,\mathrm{c}}\ sin.\,\gamma.$$

Die eingeschlossene Seite α findet man ohne Weiteres durch die Formeln (18) und (19). Gleichung (18) giebt

$$tang.\,\varrho = cos.\,\mathrm{b}\,.\,tang.\,\gamma;$$

ist ϱ auf diese Weise gefunden, so findet man $\alpha - \varrho$, also auch α selbst durch Gleichung (19), denn sie giebt

$$sin.\,(\alpha - \varrho) = \frac{tang.\,\mathrm{b}}{tang.\,\mathrm{c}}\ sin.\,\varrho.$$

Den dritten Winkel a findet man durch die Gleichungen (21); die erste giebt

$$cotang.\,\varphi = cos.\,\gamma\ tang.\,\mathrm{b},$$

und wenn φ bekannt ist, so giebt die folgende $\mathrm{a} - \varphi$, also a selbst, denn nach ihr ist

$$sin.\,(\mathrm{a} - \varphi) = \frac{cos.\,\mathrm{c}}{cos.\,\mathrm{b}}\,.\,sin.\,\varphi.$$

28 **Zusammenstellung der Formeln.** Zur bequemeren Uebersicht mag hier noch eine Zusammenstellung der oben entwickelten, zur Berechnung der fehlenden Stücke sphärischer Dreiecke dienenden Formeln folgen.

Erster Fall. Gegeben α, β, γ.

$$cos.\,\mathrm{a} = \frac{cos.\,\alpha - cos.\,\beta\,.\,cos.\,\gamma}{sin.\,\beta\,.\,sin.\,\gamma}$$

$$\cos. b = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha . \cos.\gamma}{\sin.\alpha . \sin.\gamma}$$

$$\cos. c = \frac{\cos.\gamma - \cos.\alpha . \cos.\beta}{\sin.\alpha . \sin.\beta},$$

oder für logarithmische Rechnung umgewandelt:

$$(\sin. {}^1/_2\, a)^2 = \frac{\sin. {}^1/_2\, (\alpha + \beta - \gamma)\ \sin. {}^1/_2\, (\alpha + \gamma - \beta)}{\sin.\beta . \sin.\gamma}$$

$$(\sin. {}^1/_2\, b)^2 = \frac{\sin. {}^1/_2\, (\beta + \alpha - \gamma)\ \sin. {}^1/_2\, (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin.\alpha . \sin.\gamma}$$

$$(\sin. {}^1/_2\, c)^2 = \frac{\sin. {}^1/_2\, (\gamma + \alpha - \beta)\ \sin. {}^1/_2\, (\gamma + \beta - \alpha)}{\sin.\alpha . \sin.\beta}.$$

Zweiter Fall. Gegeben a, b, c.

$$\cos.\beta = \frac{\cos. b + \cos. a . \cos. c}{\sin. a . \sin. c}$$

oder

$$(\sin. {}^1/_2\, \beta)^2 = \frac{\cos. {}^1/_2\, (a + b + c)\ \cos. {}^1/_2\, (a + c - b)}{\sin. a . \sin. c}.$$

Diesem analog sind die Werthe von $\cos.\alpha$, $(\sin. {}^1/_2\, \alpha)^2$, $\cos.\gamma$ und $(\sin. {}^1/_2\, \gamma)^2$.

Dritter Fall. Gegeben α, γ und b.

$$\cos.\beta = \cos.\alpha . \cos.\gamma - \sin.\alpha . \sin.\gamma\ \cos. b$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos.\beta &= \frac{\cos.\gamma}{\cos.\varrho} \cos. (\alpha - \varrho) \\ \tang.\varrho &= \cos. b . \tang.\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tang. c &= \frac{\tang. b}{\sin. (\alpha - \varrho)} . \sin.\varrho \\ \tang.\varrho &= \tang.\gamma\ \cos. b \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tang. a &= \frac{\tang. b}{\sin. (\gamma - \varrho)} \sin.\varrho \\ \tang.\varrho &= \tang.\alpha . \cos. b \end{aligned}\right\}$$

Vierter Fall. Gegeben a, b und γ.

$$\left.\begin{aligned} \cos. c &= \frac{\cos. b}{\sin.\varphi} \sin. (a - \varphi) \\ \cotang.\varphi &= \tang. b\ \cos.\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tang.\alpha &= \frac{\tang.\gamma}{\sin. (b + \psi)} \sin.\psi \\ \tang.\psi &= \cos.\gamma . \tang. a \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\beta &= \frac{tang.\,\gamma}{sin.\,(\mathrm{a}+\psi)} \\ tang.\,\psi &= cos.\,\gamma\,.\,tang.\,\mathrm{b} \end{aligned}\right\}$$

Fünfter Fall. Gegeben β, γ und b.

$$sin.\,\mathrm{c} = \frac{sin.\,\gamma}{sin.\,\beta}\,.\,sin.\,\mathrm{b}$$

$$\left.\begin{aligned} cos.\,(\alpha - \varrho) &= \frac{cos.\,\varrho\,.\,cos.\,\beta}{cos.\,\gamma} \\ tang.\,\varrho &= cos.\,\mathrm{b}\ tang.\,\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,(\mathrm{a} + \psi) &= \frac{tang.\,\gamma}{tang.\,\beta}\ sin.\,\psi \\ tang.\,\psi &= tang.\,\mathrm{b}\ cos.\,\gamma \end{aligned}\right\}$$

Sechster Fall. Gegeben b, c und γ.

$$sin.\,\beta = \frac{sin.\,\mathrm{b}}{sin.\,\mathrm{c}}\ sin.\,\gamma$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,(\alpha - \varrho) &= \frac{tang.\,\mathrm{b}}{tang.\,\mathrm{c}}\ sin.\,\varrho \\ tang.\,\varrho &= cos.\,b\,.\,tang.\,\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,(\alpha - \varphi) &= \frac{cos.\,\mathrm{c}}{cos.\,\mathrm{b}}\,.\,sin.\,\varphi \\ cotang.\,\varphi &= cos.\,\gamma\,.\,tang.\,\mathrm{b} \end{aligned}\right\}$$

Anhang.

Tafel

der

trigonometrischen Funktionen

des

ersten Quadranten

von

zehn zu zehn Minuten.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
0	0	0,000000	1,000000	0,000000	infinit	0	90
	10	0,002909	0,999996	0,002909	343,77371	50	
	20	0,005818	0,999983	0,005818	171,88540	40	
	30	0,008727	0,999962	0,008727	114,58865	30	
	40	0,011635	0,999932	0,011636	85,939791	20	
	50	0,014544	0,999894	0,014545	68,750087	10	
1	0	0,017452	0,999848	0,017455	57,289962	0	89
	10	0,020361	0,999793	0,020365	49,103881	50	
	20	0,023269	0,999729	0,023275	42,964077	40	
	30	0,026177	0,999657	0,026186	38,188459	30	
	40	0,029085	0,999577	0,029097	34,367771	20	
	50	0,031992	0,999488	0,032009	31,241577	10	
2	0	0,034900	0,999391	0,034921	28,636253	0	88
	10	0,037807	0 999285	0,037834	26,431600	50	
	20	0,040713	0,999171	0,040747	24.541758	40	
	30	0,043620	0,999048	0,043661	22,903766	30	
	40	0,046525	0,998917	0,046576	21,470401	20	
	50	0,049431	0,998778	0,049491	20,205553	10	
3	0	0,052336	0,998630	0,052408	19,081137	0	87
	10	0,055241	0,998473	0,055325	18,074977	50	
	20	0,058145	0,998308	0,058243	17,169337	40	
	30	0,061049	0,998135	0,061163	16,349855	30	
	40	0,063952	0,997953	0,064083	15,604784	20	
	50	0,066854	0,997763	0,067004	14,924417	10	
4	0	0,069757	0,997564	0,069927	14,300666	0	86
	10	0,072658	0,997357	0,072851	13,726738	50	
	20	0,075559	0,997141	0,075776	13,196883	40	
	30	0,078460	0,996917	0,078702	12,706205	30	
	40	0,081359	0,996685	0,081630	12,250505	20	
	50	0,084258	0,996444	0,084558	11,826167	10	
5	0	0,087156	0,996195	0,087489	11,430052	0	85
	10	0,090053	0,995937	0,090421	11,059431	50	
	20	0,092950	0,995671	0,093354	10,711913	40	
	30	0,095846	0,995396	0,096290	10,385397	30	
	40	0,098741	0,995113	0,099226	10,078031	20	
	50	0,101635	0,994822	0,102164	9,788173	10	
6	0	0,104529	0,994522	0,105104	9,514365	0	84
	10	0,107421	0,994214	0,108046	9,255304	50	
	20	0,110313	0,993897	0,110990	9,009826	40	
	30	0,113203	0,993572	0,113936	8,776887	30	
	40	0,116093	0,993238	0,116883	8,555547	20	
	50	0,118982	0,992897	0,119833	8,344956	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
7	0	0,121869	0,992546	0,122785	8,144346	0	83
	10	0,124756	0,992187	0,125738	7,953022	50	
	20	0,127642	0,991820	0,128694	7,770351	40	
	30	0,130526	0,991445	0,131653	7,595754	30	
	40	0,133410	0,991061	0,134613	7,428700	20	
	50	0,136292	0,990669	0,137576	7,268726	10	
8	0	0,139173	0,990268	0,140541	7,115370	0	82
	10	0,142053	0,989860	0,143508	6,968234	50	
	20	0,144932	0,989442	0,146478	6,826944	40	
	30	0,147809	0,989016	0,149451	6,691156	30	
	40	0,150686	0,988582	0,152426	6,560554	20	
	50	0,153561	0,988139	0,155404	6,434843	10	
9	0	0,156435	0,987688	0,158384	6,313752	0	81
	10	0,159307	0,987230	0,161368	6,197028	50	
	20	0,162178	0,986762	0,164354	6,084438	40	
	30	0,165048	0,986286	0,167343	5,975764	30	
	40	0,167916	0,985801	0,170334	5,870804	20	
	50	0,170783	0,985309	0,173330	5,769369	10	
10	0	0,173648	0,984808	0,176327	5,671282	0	80
	10	0,176512	0,984299	0,179328	5,576379	50	
	20	0,179375	0,983781	0,182332	5,484505	40	
	30	0,182236	0,983255	0,185340	5,395517	30	
	40	0,185095	0,982721	0,188350	5,309280	20	
	50	0,187953	0,982178	0,191363	5,225665	10	
11	0	0,190809	0,981627	0,194380	5,144554	0	79
	10	0,193664	0,981068	0,197401	5,065835	50	
	20	0,196517	0,980501	0,200425	4,989403	40	
	30	0,199368	0,979925	0,203452	4,915157	30	
	40	0,202218	0,979341	0,206483	4,843005	20	
	50	0,205066	0,978748	0,209518	4,772857	10	
12	0	0,207912	0,978148	0,212557	4,704630	0	78
	10	0,210756	0,977539	0,215599	4,638246	50	
	20	0,213599	0,976922	0,218645	4,573629	40	
	30	0,216440	0,976296	0,221695	4,510709	30	
	40	0,219279	0,975662	0,224749	4,449418	20	
	50	0,222116	0,975020	0,227806	4,389694	10	
13	0	0,224951	0,974370	0,230868	4,331476	0	77
	10	0,227784	0,973712	0,233934	4,274707	50	
	20	0,230616	0,973045	0,237004	4,219332	40	
	30	0,233445	0,972370	0,240079	4,165300	30	
	40	0,236273	0,971687	0,243158	4,112561	20	
	50	0,239098	0,970995	0,246241	4,061070	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
14	0	0,241922	0,970296	0,249328	4,010781	0	76
	10	0,244743	0,969588	0,252420	3,961652	50	
	20	0,247563	0,968872	0,255517	3,913642	40	
	30	0,250380	0,968148	0,258618	3,866713	30	
	40	0,253195	0,967415	0,261723	3,820828	20	
	50	0,256008	0,966675	0,264834	3,775952	10	
15	0	0,258819	0,965926	0,267949	3,732051	0	75
	10	0,261628	0,965169	0,271069	3,689093	50	
	20	0,264434	0,964404	0,274195	3,647047	40	
	30	0,267238	0,963631	0,277325	3,605884	30	
	40	0,270040	0,962849	0,280460	3,565575	20	
	50	0,272840	0,962059	0,283600	3,526094	10	
16	0	0,275637	0,961262	0,286745	3,487414	0	74
	10	0,278432	0,960456	0,289896	3,449512	50	
	20	0,281225	0,959642	0,293052	3,412363	40	
	30	0,284015	0,958820	0,296214	3,375943	30	
	40	0,286803	0,957990	0,299380	3,340233	20	
	50	0,289589	0,957151	0,302553	3,305209	10	
17	0	0,292372	0,956305	0,305731	3,270853	0	73
	10	0,295152	0,955450	0,308914	3,237144	50	
	20	0,297930	0,954588	0,312104	3,204064	40	
	30	0,300706	0,953717	0,315299	3,171595	30	
	40	0,303479	0,952838	0,318500	3,139719	20	
	50	0,306249	0,951951	0,321707	3,108421	10	
18	0	0,309017	0,951057	0,324920	3,077684	0	72
	10	0,311782	0,950154	0,328139	3,047492	50	
	20	0,314545	0,949243	0,331364	3,017830	40	
	30	0,317305	0,948324	0,334595	2,988685	30	
	40	0,320062	0,947397	0,337833	2,960042	20	
	50	0,322816	0,946462	0,341077	2,931889	10	
19	0	0,325568	0,945519	0,344328	2,904211	0	71
	10	0,328317	0,944568	0,347585	2,876997	50	
	20	0,331063	0,943609	0,350848	2,850235	40	
	30	0,333807	0,942642	0,354119	2,823913	30	
	40	0,336548	0,941667	0,357396	2,798020	20	
	50	0,339285	0,940684	0,360680	2,772545	10	
20	0	0,342020	0,939693	0,363970	2,747477	0	70
	10	0,344752	0,938694	0,367268	2,722808	50	
	20	0,347481	0,937687	0,370573	2,698525	40	
	30	0,350207	0,936672	0,373885	2,674622	30	
	40	0,352931	0,935650	0,377204	2,651087	20	
	50	0,355651	0,934619	0,380530	2,627912	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
21	0	0,358368	0,933580	0,383864	2,605089	0	69
	10	0,361082	0,932534	0,387205	2,582609	50	
	20	0,363793	0,931480	0,390554	2,560465	40	
	30	0,366501	0,930418	0,393911	2,538648	30	
	40	0,369206	0,929348	0,397275	2,517151	20	
	50	0,371908	0,928270	0,400647	2,495966	10	
22	0	0,374607	0,927184	0,404026	2,475087	0	68
	10	0,377302	0,926090	0,407414	2,454506	50	
	20	0,379994	0,924989	0,410810	2,434217	40	
	30	0,382683	0,923880	0,414214	2,414214	30	
	40	0,385369	0,922762	0,417626	2,394489	20	
	50	0,388052	0,921638	0,421046	2,375037	10	
23	0	0,390731	0,920505	0,424475	2,355852	0	67
	10	0,393407	0,919364	0,427912	2,336929	50	
	20	0,396080	0,918216	0,431358	2,318261	40	
	30	0,398749	0,917060	0,434812	2,299843	30	
	40	0,401415	0,915896	0,438276	2,281669	20	
	50	0,404078	0,914725	0,441748	2,263736	10	
24	0	0,406737	0,913545	0,445229	2,246037	0	66
	10	0,409392	0,912358	0,448719	2,228568	50	
	20	0,412045	0,911164	0,452218	2,211323	40	
	30	0,414693	0,909961	0,455726	2,194300	30	
	40	0,417339	0,908751	0,459244	2,177492	20	
	50	0,419980	0,907533	0,462771	2,160896	10	
25	0	0,422618	0.906308	0,466308	2,144507	0	65
	10	0,425253	0,905075	0,469854	2,128321	50	
	20	0,427884	0,903834	0,473410	2,112335	40	
	30	0,430511	0,902585	0,476976	2,096544	30	
	40	0,433135	0,901329	0,480551	2,080944	20	
	50	0,435755	0,900065	0,484137	2,065532	10	
26	0	0,438371	0,898794	0,487733	2,050304	0	64
	10	0,440984	0,897515	0,491339	2,035257	50	
	20	0,443593	0,896229	0,494955	2,020386	40	
	30	0,446198	0,894934	0,498582	2,005690	30	
	40	0,448799	0,893633	0,502219	1,991164	20	
	50	0,451397	0,892323	0,505867	1,976805	10	
27	0	0,453991	0,891007	0,509525	1,962611	0	63
	10	0,456580	0,889682	0,513195	1,948577	50	
	20	0,459167	0,888350	0,516876	1,934702	40	
	30	0,461749	0,887011	0,520567	1,920982	30	
	40	0,464327	0,885664	0,524270	1,907415	20	
	50	0,466901	0,884310	0,527984	1,893997	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

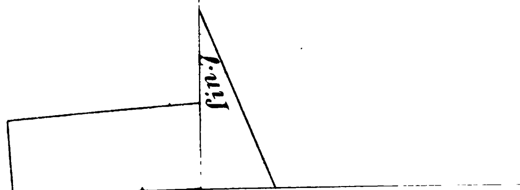
G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
28	0	0,469472	0,882948	0,531709	1,880727	0	62
	10	0,472038	0,881578	0,535447	1,867600	50	
	20	0,474600	0,880201	0,539195	1,854616	40	
	30	0,477159	0,878817	0,542956	1,841771	30	
	40	0,479713	0,877425	0,546728	1,829063	20	
	50	0,482263	0,876026	0,550513	1,816489	10	
29	0	0,484810	0,874620	0,554310	1,804048	0	61
	10	0,487352	0,873206	0,558118	1,791736	50	
	20	0,489890	0,871784	0,561939	1,779552	40	
	30	0,492424	0,870356	0,565773	1,767494	30	
	40	0,494953	0,868920	0,569619	1,755559	20	
	50	0,497479	0,867476	0,573478	1,743745	10	
30	0	0,500000	0,866025	0,577350	1,732051	0	60
	10	0,502517	0,864567	0,581235	1,720474	50	
	20	0,505030	0,863102	0,585134	1,709012	40	
	30	0,507538	0,861629	0,589045	1,697663	30	
	40	0,510043	0,860149	0,592970	1,686426	20	
	50	0,512543	0,858662	0,596908	1,675299	10	
31	0	0,515038	0,857167	0,600861	1,664280	0	59
	10	0,517529	0,855666	0,604827	1,653366	50	
	20	0,520016	0,854156	0,608807	1.642558	40	
	30	0,522499	0,852640	0,612801	1,631852	30	
	40	0,524977	0,851117	0,616810	1,621247	20	
	50	0,527450	0,849586	0,620832	1,610742	10	
32	0	0,529919	0,848048	0,624869	1,600335	0	58
	10	0,532384	0,846503	0,628921	1,590024	50	
	20	0,534844	0,844951	0,632988	1,579808	40	
	30	0,537300	0,843391	0,637070	1,569686	30	
	40	0,539751	0,841825	0,641167	1,559655	20	
	50	0,542197	0,840251	0,645280	1,549716	10	
33	0	0,544639	0,838671	0,649408	1,539865	0	57
	10	0,547076	0,837083	0,653551	1,530102	50	
	20	0,549509	0,835488	0,657710	1,520426	40	
	30	0,551937	0,833886	0,661886	1,510835	30	
	40	0,554360	0,832277	0,666077	1,501328	20	
	50	0,556779	0,830661	0,670285	1,491904	10	
34	0	0,559193	0,829038	0,674509	1,482561	0	56
	10	0,561602	0,827407	0,678749	1,473298	50	
	20	0,564007	0,825770	0,683007	1,464115	40	
	30	0,566406	0,824126	0,687281	1,455009	30	
	40	0,568801	0,822475	0,691573	1,445980	20	
	50	0,571191	0,820817	0,695881	1,437027	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
35	0	0,573576	0,819152	0,700208	1,428148	0	55
	10	0,575957	0,817480	0,704552	1,419343	50	
	20	0,578332	0,815801	0,708913	1,410610	40	
	30	0,580703	0,814116	0,713293	1,401948	30	
	40	0,583069	0,812423	0,717691	1,393357	20	
	50	0,585429	0,810723	0,722108	1,384835	10	
36	0	0,587785	0,809017	0,726543	1,376382	0	54
	10	0,590136	0,807304	0,730996	1,367996	50	
	20	0,592482	0,805584	0,735469	1,359676	40	
	30	0,594823	0,803857	0,739961	1,351422	30	
	40	0,597159	0,802123	0,744472	1,343233	20	
	50	0,599489	0,800383	0,749003	1,335108	10	
37	0	0,601815	0,798636	0,753554	1,327045	0	53
	10	0,604136	0,796882	0,758125	1,319044	50	
	20	0,606451	0,795121	0,762716	1,311105	40	
	30	0,608761	0,793353	0,767327	1,303225	30	
	40	0,611067	0,791580	0,771959	1,295406	20	
	50	0,613367	0,789798	0,776612	1,287645	10	
38	0	0,615662	0,788011	0,781286	1,279942	0	52
	10	0,617951	0,786217	0,785981	1,272296	50	
	20	0,620236	0,784416	0,790698	1,264706	40	
	30	0,622515	0,782608	0,795436	1,257172	30	
	40	0,624789	0,780794	0,800196	1,249693	20	
	50	0,627057	0,778973	0,804979	1,242269	10	
39	0	0,629320	0,777146	0,809784	1,234897	0	51
	10	0,631578	0,775312	0,814612	1,227579	50	
	20	0,633831	0,773472	0,819463	1,220312	40	
	30	0,636078	0,771625	0,824336	1,213097	30	
	40	0,638320	0,769771	0,829234	1,205933	20	
	50	0,640557	0,767911	0,834155	1,198818	10	
40	0	0,642788	0,766044	0,839100	1,191754	0	50
	10	0,645013	0,764171	0,844069	1.184738	50	
	20	0,647233	0,762292	0,849062	1,177770	40	
	30	0,649448	0,760406	0,854081	1,170850	30	
	40	0,651657	0,758514	0.859124	1,163976	20	
	50	0,653861	0,756615	0,864193	1,157150	10	
41	0	0,656059	0,754710	0,869287	1,150368	0	49
	10	0,658252	0,752798	0,874407	1,143633	50	
	20	0,660439	0,750880	0,879553	1,136941	40	
	30	0,662620	0,748956	0,884725	1,130294	30	
	40	0,664796	0,747025	0,889924	1,123691	20	
	50	0,666966	0,745088	0,895151	1,117131	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
42	0	0,669131	0,743145	0,900404	1,110612	0	**48**
	10	0,671290	0,741195	0,905685	1,104137	50	
	20	0,673443	0,739240	0,910994	1,097702	40	
	30	0,675590	0,737277	0,916331	1,091309	30	
	40	0,677732	0,735310	0,921697	1,084955	20	
	50	0,679868	0,733335	0,927091	1,078642	10	
43	0	0,681998	0,731354	0,932515	1,072369	0	**47**
	10	0,684123	0,729367	0,937968	1,066134	50	
	20	0,686242	0,727374	0,943451	1,059938	40	
	30	0,688355	0,725374	0,948965	1,053780	30	
	40	0,690462	0,723369	0,954508	1,047660	20	
	50	0,692563	0,721357	0,960083	1,041577	10	
44	0	0,694658	0,719340	0,965689	1,035530	0	**46**
	10	0,696748	0,717316	0,971326	1,029520	50	
	20	0,698832	0,715286	0,976996	1,023546	40	
	30	0,700909	0,713250	0,982697	1,017607	30	
	40	0,702981	0,711209	0,988432	1,011704	20	
	50	0,705047	0,709161	0,994199	1,005835	10	
45	0	0,707107	0,707107	1,000000	1,000000	0	**45**
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

Netz z

Netz zu Fig. 23.



Berichtigung.

Die vorletzte Formel der Seite 68 muß statt:

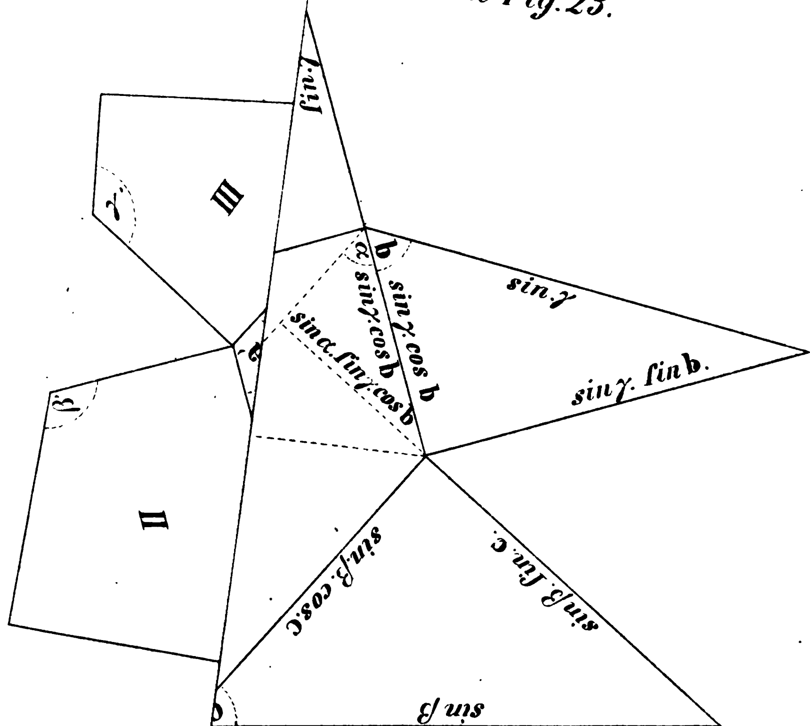
$$\sin.(\alpha - \varphi) = \frac{\cos.\ c}{\cos.\ b} \cdot \sin.\ \varphi$$

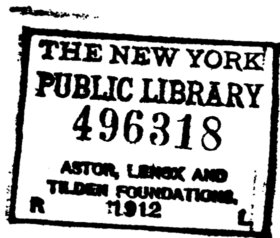
heißen:

$$\sin.(a - \varphi) = \frac{\cos.\ c}{\cos.\ b} \cdot \sin.\ \varphi.$$

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
42	0	0,669131	0,743145	0,900404	1,110612	0	48
	10	0,671290	0,741195	0,905685	1,104137	50	
	20	0,673443	0,739240	0,910994	1,097702	40	
	30	0,675590	0,737277	0,916331	1,091309	30	
	40	0,677732	0,735310	0,921697	1,084955	20	
	50	0,679868	0,733335	0,927091	1,078642	10	
43	0	0,681998	0,731354	0,932515	1,072369	0	47
	10	0,684123	0,729367	0,937968	1,066134	50	
	20	0,686242	0,727374	0,943451	1,059938	40	
	30	0,688355	0,725374	0,948965	1,053780	30	

Netz zu Fig. 23.





Holzschnitte
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Anfangsgründe

der

geometrischen Disciplinen

für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen,

sowie auch

zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

In drei Theilen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Dritter Theil:

Elemente der analytischen Geometrie

in der

Ebene und im Raum.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1859.

Elemente

der

analytischen Geometrie

in der

Ebene und im Raum.

Für

Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

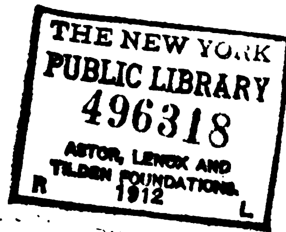
Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

Mit 90 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 5 9.



Vorrede.

Ein gründliches Studium der Naturwissenschaften, namentlich aber der Physik, ist, wie wohl allgemein anerkannt wird, ohne mathematische Vorkenntnisse ganz unmöglich, und von mancher Seite her hört man deshalb auch den Mangel derselben bitter beklagen. Da nun aber doch die Mathematik fast auf allen höheren Schulanstalten Deutschlands einen wesentlichen Theil des Lectionsplanes bildet, so kann der verhältnißmäßig geringe Erfolg des mathematischen Unterrichtes kaum in etwas Anderem gesucht werden, als in der unzweckmäßigen Art, wie derselbe häufig ertheilt wird.

Der Vortrag der mathematischen Disciplinen wird nämlich vielfach allzu abstract gehalten, was die nachtheilige Folge hat, daß er nicht nur für die Naturwissenschaften vollkommen unfruchtbar bleibt, sondern daß er auch bei den Schülern eine meist schwer zu überwindende Abneigung gegen das mathematische Studium hervorruft.

Auffallender Weise treffen diese Vorwürfe vorzugsweise den geometrischen Unterricht, während Arithmetik und Algebra sich meist eines weit besseren Erfolges zu erfreuen haben.

Die mathematischen Vorkenntnisse, deren man für ein gedeihliches Studium der Physik bedarf, sind, wenn es sich nicht gerade um die schwierigsten Fragen handelt, weder sehr umfangreich noch schwer zugänglich. Es bedarf nur verhältnißmäßig weniger aber klar verstandener Sätze, welche durch genügende Uebung vollkommen geistiges Eigenthum geworden sind. Dadurch ist nun der Weg bezeichnet, welcher beim mathematischen Unterrichte befolgt werden muß, wenn er fruchtbringend für Wissenschaft und Leben werden soll. Es handelt sich darum, die für den logischen Zusammenhang, für das Fortschreiten in höheren mathematischen Disciplinen und für die practische Anwendung unentbehrlichen Wahrheiten möglichst klar und verständlich zu entwickeln und durch geeignete

Beispiele gut einzuüben. Nirgends wirkt eine Ueberladung an Material und ein Verlieren in Specialitäten nachtheiliger als beim mathematischen Unterrichte.

In diesem Sinne habe ich es versucht, die wichtigsten geometrischen Disciplinen zu bearbeiten, und zwar in drei Theilen, nämlich:

1. Die Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie;
2. Die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie;
3. Die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume;

welche zwar ein zusammengehöriges Ganzes bilden, von denen aber doch auch jeder einzelne Theil für sich bezogen werden kann.

Die beiden ersten Theile erscheinen gegenwärtig in zweiter Auflage. Die erste Auflage der ebenen Geometrie war im Jahre 1838, die erste Auflage der Trigonometrie war im Jahre 1839, freilich in etwas mangelhafter Ausstattung, zu Darmstadt erschienen. Die darin befolgte Methode hat sich bei dem geometrischen Unterrichte, welcher mir an der Realschule zu Gießen bis zu meiner Berufung nach Freiburg im Jahre 1844 übertragen war, vortrefflich bewährt, indem es mir namentlich gelang, den Schülern ein lebhaftes Interesse für den Gegenstand abzugewinnen und die erfreulichsten Fortschritte zu erzielen.

Es ist weder für ein weiteres Fortschreiten in der höheren Mathematik noch für praktische Anwendungen irgend einer Art genügend, daß man die geometrischen Wahrheiten einmal erkannt und verstanden hat; sie müssen durch erläuternde Beispiele, durch passende Uebungen zu einer lebendigen Anschauung erhoben werden, ohne welche eine freie Verwendung derselben für die Zwecke der Wissenschaft und des Lebens vollkommen unmöglich ist.

Während in dem vorliegenden Werkchen die Masse des Materials in dem oben angedeuteten Sinne auf das Nothwendigste beschränkt wurde, war ich bemüht, die vorgetragenen Lehren ausführlich genug zu entwickeln, um auch beim Selbstunterrichte zu einem vollkommen klaren Verständniß führen zu können, vorausgesetzt, daß der Leser alle Constructions- und Rechnungsbeispiele mit Sorgfalt und Genauigkeit ausführt.

Für eine lebendige Anschauung sind Constructionsaufgaben nach bestimmten Maaßen durchaus unentbehrlich, und deshalb habe ich sie auch in dem ganzen Werkchen von Anfang an durchgeführt. Nur durch solche Aufgaben wird es möglich, bei einem jeden Satze lange genug zu ver-

weilen, um ihn dem Gedächtniß gehörig einzuprägen und seine Bedeutung ins rechte Licht zu setzen. Gerade diese Constructionsaufgaben sind es auch, welche beim Unterrichte die rege Theilnahme des Schülers hervorrufen und dem Lehrer eine Controle darüber bieten, wie weit der Schüler in das Verständniß des fraglichen Satzes eingedrungen ist.

Beim Schulunterrichte müssen diese Aufgaben wenigstens theilweise nach einem größeren Maaßstabe auf der Tafel ausgeführt werden, wonach dann die übrigen dem häuslichen Fleiße überlassen bleiben können.

Ueber die einzelnen Theile bleiben nur noch wenige Bemerkungen zu machen übrig.

Ohne in Beziehung auf Tendenz und Methode etwas zu ändern, hat die zweite Auflage der Elemente der Geometrie namhafte Verbesserungen und eine wesentliche Ergänzung dadurch erfahren, daß die nothwendigsten Lehren der Stereometrie, welche in der ersten Auflage ganz fehlten, beigefügt wurden.

Ein besonderer Vorzug ist der neuen Auflage der Geometrie dadurch gesichert, daß die Figuren nicht allein ohne Vergleich besser und deutlicher, sondern auch weit zahlreicher sind, als in der ersten Auflage, was vorzugsweise daher rührt, daß ein großer Theil zum leichteren Verständniß wesentliche Figuren, welche in der ersten Auflage nur aus übergroßer Sparsamkeit weggeblieben waren, nun ihre Stelle gefunden haben.

Durch diese verbesserte Ausstattung, durch sorgfältige Ueberarbeitung des Textes und durch geeignete Ausfüllung mancher Lücken, welche bei der früheren Auflage lediglich dem mündlichen Unterrichte überlassen waren, hoffe ich das vorliegende Werkchen auch dem Selbstunterrichte zugänglich, so wie durch ein vollständiges Paragraphenregister und ein alphabetisches Inhaltsverzeichniß zur leichteren Orientirung und zum Nachschlagen geeigneter gemacht zu haben.

Zur Ausführung der Constructionsaufgaben ist ein Transporteur und ein Maaßstab nöthig. Um eine besondere Anschaffung derselben entbehrlich zu machen, sind den »Elementen der ebenen Geometrie« Abdrücke eines Transporteurs und einer Maaßstabstafel auf stärkerem Papier beigegeben worden.

Auch die Grundzüge der Trigonometrie erscheinen, wie schon bemerkt, in zweiter Auflage, zwar verbessert, aber ohne wesentliche Aenderung. Die trigonometrischen Functionen habe ich als Linien, als die Seiten rechtwinkeliger Dreiecke definirt, in welchen eine Seite der Längeneinheit gleich ist, weil diese Definition einfacher und anschaulicher

ist als die andere, nach welcher sie als Quotient zweier Dreiecksseiten bezeichnet werden. Die Linie ist ein geometrischer Begriff, der Quotient ist es nicht; deshalb glaubte ich die erstere Definition an die Spitze stellen, die letztere aber erst aus der Berechnung der Formeln rechtwinkeliger Dreiecke ableiten zu müssen.

Um dem Schüler nicht mit zwei Schwierigkeiten auf einmal entgegen zu treten, habe ich auch die Berechnung trigonometrischer Aufgaben im Anfang ohne Anwendung der Logarithmen durchgeführt und lasse die Benutzung der Logarithmen erst dann eintreten, wenn die Lehre von den trigonometrischen Functionen an und für sich klar und geläufig geworden ist. — Aus demselben Grunde habe ich auch die Formeln, welche zur Berechnung der fehlenden Stücke ebener und sphärischer Dreiecke dienen, erst vollständig aus der rein geometrischen Betrachtung entwickelt und erst später, ganz getrennt von dieser ersten Entwickelung, folgt die Umwandlung der Formeln, durch welche dieselben für logarithmische Rechnungen bequem gemacht werden.

Weil es im Anfang immerhin einige Schwierigkeiten hat, nach ebenen Figuren sich zu einer richtigen Anschauung räumlicher Verhältnisse zu erheben, habe ich der sphärischen Trigonometrie die Zeichnung der Netze beigefügt, aus welchen die den beiden Hauptfiguren dieser Abtheilung entsprechenden körperlichen Modelle leicht hergestellt werden können. Mit Hülfe dieser Modelle wird wohl das Verständniß der entsprechenden Entwickelungen keine Schwierigkeit mehr haben.

Der dritte Theil, die analytische Geometrie, erscheint zum ersten Male. Ich war bei Bearbeitung derselben bemüht, durch ausführlichere Besprechung concreter Fälle und durch Constructionsbeispiele nach gegebenen Zahlenwerthen die hier neu auftretenden Begriffe zugänglicher zu machen, als es gewöhnlich geschieht. Ich glaube namentlich auf diese Weise eine Brücke gebaut zu haben, welche den Leser über die Schwierigkeiten hinwegführt, die sich ihm meist beim Eintritt in das Studium der höheren geometrischen Disciplinen entgegenstellen.

Der analytischen Geometrie ist die Zeichnung des Netzes beigegeben, aus welchem man das körperliche Eck herstellen kann, welches durch die positiven Theile der drei Coordinatenebenen gebildet wird.

Freiburg, im Mai 1859.

J. Müller.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Analytische Geometrie in der Ebene.

Erstes Kapitel.

Der Punkt und die gerade Linie in der Ebene.

Zweites Kapitel.

Vom Kreise.

Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

Viertes Kapitel.
Die Parabel.

Fünftes Kapitel.
Die Hyperbel.

Sechstes Kapitel.
Transformation der Coordinaten.

Siebentes Kapitel.
Curven höherer Ordnung und transscendente Curven.

Zweites Buch.
Analytische Geometrie im Raum.

Erstes Kapitel.
Punkte, Linien und Oberflächen im Raum.

Zweites Kapitel.
Krumme Oberflächen.

Drittes Kapitel.
Durchschneidung krummer Oberflächen mit ebenen Flächen.

Erstes Buch.

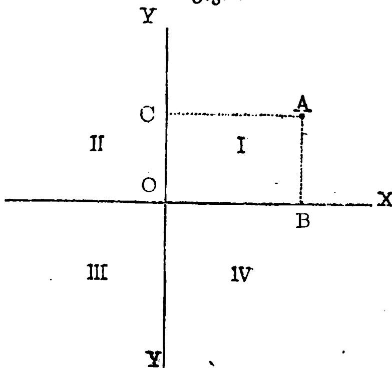
Analytische Geometrie in der Ebene.

Erstes Kapitel.

Der Punkt und die gerade Linie in der Ebene.

Bestimmung eines Punktes in der Ebene. Denken wir uns 1
in einer Ebene zwei zu einander rechtwinkelige, in O, Fig. 1, sich schneidende Linien XX und YY gezogen, so kann man die Lage irgend eines Punktes in der Ebene dadurch bestimmen, daß man seine Entfernung von jeder der beiden Linien angiebt.

Fig. 1.



Von dem Punkte A sei ein Perpendikel AB auf XX und eines AC auf YY gefällt, so ist $AB = OC$ der Abstand des Punktes A von XX, während $AC = OB$ der Abstand des Punktes A von YY ist.

Die Entfernungen eines Punktes von den Axen XX und YY werden seine Coordinaten, die Axen XX und YY selbst werden die Coordinatenaxen genannt.

Der Abstand eines Punktes von der Axe YY wird seine Abscisse und die horizontale Axe XX, nach deren Richtung die Abscissen gemessen werden, wird die Abscissenaxe genannt.

Die Abscissen werden mit x und demnach die Abscissenaxe als die Axe der x bezeichnet.

Dagegen wird der parallel mit YY gemessene Abstand eines Punktes von der Axe der x seine Ordinate genannt und mit y bezeichnet. Die Linie YY heißt deshalb auch die Ordinatenaxe oder die Axe der y.

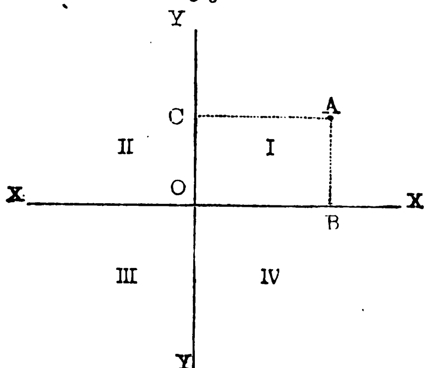
Die Abscisse des Punktes A, Fig. 1, ist 1,8 Centimeter, seine Ordinate ist $1,2^{cm}$; oder mit anderen Worten: für den Punkt A ist $x = 1,8^{cm}$ und $y = 1,2^{cm}$.

Um mit Hülfe der Ordinaten alle möglichen Lagen eines Punktes in der Ebene bezeichnen zu können, genügt es nicht, seine Abstände von den Coordinatenaxen anzugeben, man muß auch wissen, ob der Punkt rechts oder links von der Axe der y und ob er über oder unter der Axe der x liegt.

Gewöhnlich zählt man die positiven Werthe der Abscissen von O aus nach der rechten Seite; alsdann aber muß man alle von O nach links gemessenen Abscissen als negative bezeichnen. Ebenso werden die positiven Werthe von y nach oben, die negativen nach unten gemessen.

Demnach ist für den in Fig. 1 mit I bezeichneten Quadranten:

Fig. 1.



$x +$
$y +$.

Für den Quadranten II:

$x -$
$y +$.

Für den Quadranten III:

$x -$
$y -$.

Für den Quadranten IV:

$x +$
$y -$.

Nach diesen Erläuterungen ist es leicht, nachdem man auf einem Blatt Papier die rechtwinkeligen Coordinatenaxen gezogen hat, die folgenden Punkte aufzutragen.

$A \begin{cases} x = 1,5^{cm} \\ y = 3 \;\; " \end{cases}$ $D \begin{cases} x = 3,2^{cm} \\ y = 0 \;\; " \end{cases}$

$B \begin{cases} x = 2,3^{cm} \\ y = 4 \;\; " \end{cases}$ $E \begin{cases} x = -\,3^{cm} \\ y = -\,2 \;\; " \end{cases}$

$C \begin{cases} x = -\,3,4^{cm} \\ y = 2,5 \;\; " \end{cases}$ $F \begin{cases} x = 4^{cm} \\ y = -\,1 \;\; " \end{cases}$

2 **Entfernung zweier Punkte, deren Coordinaten gegeben sind.** Es seien x' und y' die Coordinaten des Punktes A, Fig. 2, $x''y''$ die des Punktes B; man soll die Entfernung AB der beiden Punkte be-

stimmen. Fällt man von A ein Perpendikel AC auf die Ordinate des Punktes B, so ist offenbar

$$BC = y'' - y'$$
$$AC = x'' - x'.$$

Nun aber haben wir

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

oder

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2,$$

wenn wir mit d den Abstand der beiden Punkte A und B bezeichnen, also

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

So ist z. B. der Abstand der beiden mit A und B bezeichneten Punkte, deren Coordinaten am Schlusse des vorigen Paragraphen gegeben worden,

$$d = \sqrt{(2{,}3 - 1{,}5)^2 + (4 - 3)^2}$$
$$d = \sqrt{0{,}8^2 + 1^2} = \sqrt{1{,}64} = 1{,}28\,..$$

Für den Abstand der beiden Punkte B und C haben wir

$$d = \sqrt{(2{,}3 + 3{,}4)^2 + (4 - 2{,}5)^2}.$$

Wie groß ist der Abstand der Punkte C und D, der Punkte D und E, E und F u. s. w.?

Fig. 2.

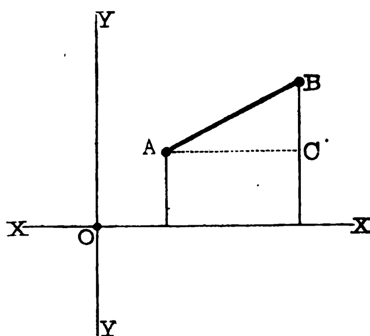
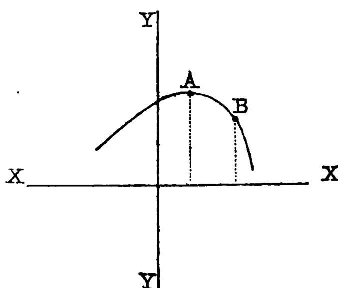


Fig. 3.



Gleichung der geraden Linie. Die Gesammtheit aller geometrischen Oerter, welche ein in Bewegung befindlicher Punkt durchläuft, wird eine Linie oder Curve genannt. 3

Wenn der bewegte Punkt stets in einer Ebene bleibt, so ist die von ihm beschriebene Curve eine ebene.

Geht man von einem Punkt A einer ebenen Curve, Fig. 3, zu

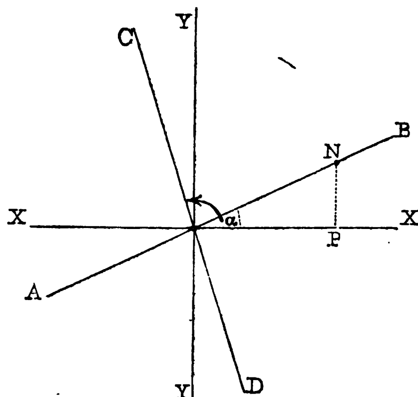
einem andern B über, so ändern sich gleichzeitig die zusammengehörigen Werthe von x und y und zwar nach einem bestimmten Gesetze, welches von der Natur der Curve abhängig ist.

Diese Abhängigkeit, welche zwischen x und y stattfindet, wenn die durch sie bestimmten Punkte stets auf einer gegebenen Curve liegen sollen, wird durch eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und y ausgedrückt, welche man als Gleichung der Curve bezeichnet.

Kurz jede Gleichung mit zwei Veränderlichen x und y stellt eine Curve dar, wenn man die zusammengehörigen Werthe von x und y in der angedeuteten Weise als die Coordinaten eines Punktes betrachtet. Die Eigenschaften der Curve lassen sich dann durch Discussion der Gleichung ermitteln.

Betrachten wir zunächst die Gleichung der geraden Linie.

Fig. 4.



Denken wir uns in Fig. 4 eine gerade Linie AB durch den Anfangspunkt O der Coordinaten gezogen (in der Figur ist der Buchstabe O, welcher den Durchschnittspunkt der Coordinatenaxen bezeichnen soll, weggelassen), und von einem beliebigen Punkte N derselben ein Perpendikel NP auf die Abscissenaxe gefällt, so ist

$$NP = OP \, tang. \alpha,$$

wo wir auch den Punkt N auf der geraden Linie wählen mögen, wenn man mit α den Winkel bezeichnet, welchen AB mit dem positiven Arm der Abscissenaxe macht. Nun aber sind NP und OP die Coordinaten des Punktes N, wir haben also auch

$$y = x \, . \, tang. \alpha,$$

oder, wenn wir a für $tang. \alpha$ setzen,

$$y = ax \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und welche mit dem positiven Arme der Abscissenaxe einen Winkel macht, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist.

Demnach ist

$$y = 0{,}3 \, x$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche mit dem positiven Arme der Abscissenaxe einen Winkel von 16° 32′ macht. Ferner sind

$$y = x$$
$$y = 2x$$

die Gleichungen von Linien, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45° und von 63° 26′ machen.

So lange der Factor a in Gleichung (1) positiv bleibt, geht die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie durch den ersten und dritten Quadranten. Sobald aber die gerade Linie durch den zweiten und vierten Quadranten geht, wie CD, Fig. 4, muß der Factor a negativ werden, weil alsdann einem positiven x ein negatives y, und umgekehrt einem negativen x ein positives y entspricht. In diesem Falle ist auch der in der Richtung des Pfeils gezählte Winkel, welchen die Linie CD mit dem positiven Arm der Abscissenaxe macht, ein stumpfer, also $tang. \alpha$ negativ.

So ist z. B.:

$$y = -0{,}9\,x$$

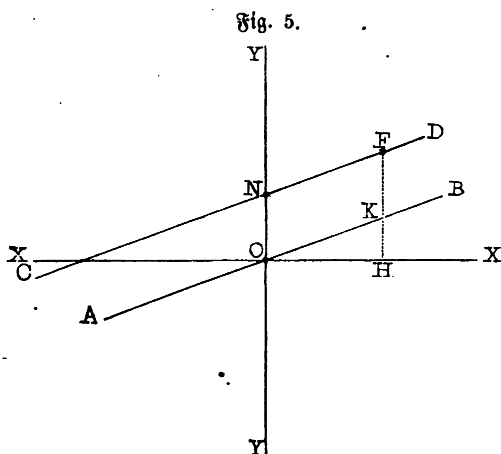
die Gleichung einer geraden Linie, welche mit dem positiven Arm der Axe der x einen Winkel von 139° macht.

Zur Uebung construire man folgende Linien:

1. $y = 0{,}7\,x$	4. $y = -0{,}4\,x$
2. $y = 1{,}3\,x$	5. $y = -1{,}8\,x$
3. $y = 3{,}358\,x$	6. $y = -2{,}4\,x$.

Durch einen Punkt N, Fig. 5, der Ordinatenaxe, dessen Abstand von O wir mit b bezeichnen wollen, sei eine gerade Linie CD parallel mit der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden AB gezogen, deren Gleichung ist $y = ax$ ist. Es ist nun leicht, auch die Gleichung der Linie CD zu finden. Denken wir uns auf CD einen beliebigen Punkt F bezeichnet

Fig. 5.



und von ihm ein Perpendikel FH auf die Abscissenaxe gefällt, welches AB in K schneidet, so ist $FK = NO = b$, folglich $FH = HK + \mathrm{b}$. Setzen wir nun $OH = x$ und $FH = y$, so haben wir offenbar

$$y = \mathrm{a}x + \mathrm{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

für die Gleichung der geraden Linie CD.

Man construire folgende Linien, den für b gesetzten Zahlenwerth als Centimeter auftragend.

$$y = 0{,}7\,x + 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{a})$$
$$y = 1{,}3\,x - 1{,}5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{b})$$
$$y = -\,1{,}8\,x - 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{c})$$
$$y = -\,0{,}7\,x + 0{,}6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{d})$$

4 **Der Durchschnittspunkt zweier geraden Linien.** Es seien

$$\left.\begin{aligned} y &= \mathrm{a}x + \mathrm{b} \\ \text{und} \quad y &= \mathrm{a}'x + \mathrm{b}' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{A})$$

die Gleichungen zweier geraden Linien, so sind die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes offenbar diejenigen Werthe von x und y, welche zugleich beiden Gleichungen Genüge leisten. Für denjenigen Werth von y, welcher zugleich beiden Gleichungen Genüge leistet, haben wir

$$\mathrm{a}x + \mathrm{b} = \mathrm{a}'x + \mathrm{b}',$$

folglich

$$x = \frac{\mathrm{b}' - \mathrm{b}}{\mathrm{a} - \mathrm{a}'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und wenn man diesen Werth von x in eine der beiden Gleichungen bei (A) setzt,

$$y = \frac{\mathrm{a}\mathrm{b}' - \mathrm{b}\mathrm{a}'}{\mathrm{a} - \mathrm{a}'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die nach den Gleichungen (3) und (4) berechneten Zahlenwerthe von x und y sind nun die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die beiden Linien bei (A) einander schneiden.

So haben wir z. B. für den Durchschnittspunkt der beiden Linien (a) und (b) des vorigen Paragraphen

$$x = \frac{-\,1{,}5 - 2}{0{,}7 - 1{,}3} = \frac{3{,}5}{0{,}6} = 5{,}8$$

$$y = \frac{-\,1{,}05 - 2{,}6}{-\,0{,}6} = \frac{3{,}65}{0{,}6} = 6{,}09.$$

Welches sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien (a) und (c), (a) und (d), (b) und (c) u. s. w.?

Der Winkel zweier geraden Linien. Bezeichnen wir mit α den Winkel, welchen die Linie AB, Fig. 6, mit β den Winkel, welchen die Linie CD mit der Axe der x macht, und mit γ den Winkel, unter welchem sich AB und CD schneiden, so ist $\gamma = \alpha - \beta$, also auch 5

$$tang.\,\gamma = \frac{tang.\,\alpha - tang.\,\beta}{1 + tang.\,\alpha\ tang.\,\beta} \ldots \text{(Trigon. S. 19).}$$

Ist nun $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ die Gleichung der Linie AB,
$y = \mathrm{a}'x + \mathrm{b}'$ » » » » CD,

Fig. 6.

so ist

$$tang.\,\alpha = \mathrm{a}$$
$$tang.\,\beta = \mathrm{a}',$$

folglich

$$tang.\,\gamma = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{a}'}{1 + \mathrm{a}\mathrm{a}'} \quad (5)$$

Welchen Winkel machen die Linien (a) und (b), §. 3, mit einander? Welchen (a) und (c), (a) und (d) u. s. w.?

Sollen die beiden Linien einander parallel sein, so muß $tang.\,\gamma = 0$, also $\mathrm{a} - \mathrm{a}' = 0$ oder $\mathrm{a} = \mathrm{a}'$ sein.

Sollen die beiden Linien rechtwinkelig auf einander stehen, so muß $tang.\,\gamma = \infty$ oder es muß der Nenner des Werthes von γ gleich Null sein, also

$$1 + \mathrm{a}\mathrm{a}' = 0,$$

oder

$$\mathrm{a}' = -\frac{1}{\mathrm{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Zwei gerade Linien schneiden sich unter einem rechten Winkel, wenn der Factor von x in der Gleichung der einen gleich ist dem negativen reciproken Werth des Factors von x in der Gleichung der andern. Die Gleichung einer Linie, welche rechtwinkelig auf

$$y = 0{,}7\,x + b$$

stehen soll, ist also

$$y = -\frac{1}{0{,}7}\,x + b'$$

oder $$y = -\ 1{,}428\,x + b'.$$

Wie groß ist der Factor von x in der Gleichung einer geraden Linie, welche rechtwinkelig steht auf der Linie (a), §. 3, auf der Linie (b), auf (c) u. s. w.?

6 **Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht.** Wenn die durch Gleichung (2) bezeichnete Linie durch einen gegebenen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x' und y' sind, so muß man diese speciellen Werthe x' und y' an die Stelle der entsprechenden Variablen in Gleichung (2) setzen können, wir haben also

$$y' = \mathrm{a}x' + \mathrm{b}$$

und daraus

$$\mathrm{b} = y' - \mathrm{a}x'.$$

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt $x'y'$ geht, ist also

$$y - y' = \mathrm{a}\,(x - x') \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Für den Fall, daß $y' = 0$, geht diese Gleichung über in

$$y = \mathrm{a}\,(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen auf der Abscissenaxe liegenden um die Länge x' vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernten Punkt geht.

7 **Gleichung einer Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht.** Es seien x' und y' die Coordinaten des einen, x'' und y'' die Coordinaten des andern Punktes, so müssen sowohl die Coordinaten des einen als auch die Coordinaten des andern Punktes in die Gleichung (2) der geraden Linie passen, wir haben also

$$y' = \mathrm{a}x' + \mathrm{b}$$
$$y'' = \mathrm{a}x'' + \mathrm{b}.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der ersten ab, so folgt

$$y' - y'' = \mathrm{a}\,(x' - x'')$$

oder

$$\mathrm{a} = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Die gesuchte Gleichung ist also

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}\,(x - x') \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Welches ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch die Punkte A und B, B und C, C und D u. s. w., §. 1, geht?

Zweites Kapitel.

Vom Kreise.

Gleichung des Kreises. Der Mittelpunkt des Kreises, Fig. 7, 8 sei zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten. Von einem beliebigen Punkte F des Kreisumfanges sei ein Perpendikel FH auf die Abscissenaxe gefällt, so ist

$$OH^2 + FH^2 = OF^2$$

oder

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn wir mit r den Radius des Kreises, mit x die Abscisse und mit y die Ordinaten des Punktes F bezeichnen. Diese Gleichung (1) ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkt der Coordinatenaxen zusammenfällt.

Ist der Mittelpunkt des Kreises nicht zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten, so nimmt die Gleichung des Kreises eine andere Gestalt an, welche leicht zu entwickeln ist.

Fig. 7.

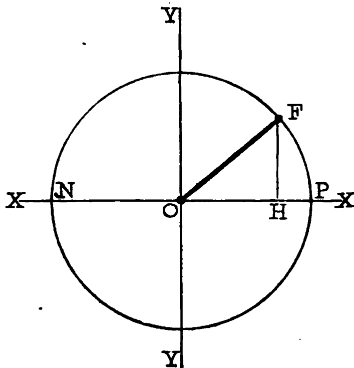
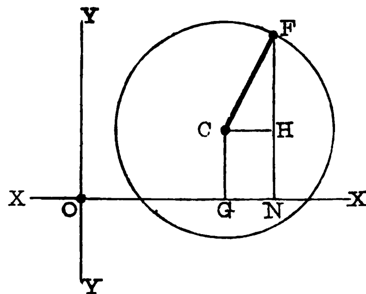


Fig. 8.



Es sei O, Fig. 8, der Anfangspunkt der Coordinaten, C der Mittelpunkt des Kreises, dessen Abscisse OG mit a und dessen Ordinate GC mit b bezeichnet werden mag. Ist nun F irgend ein Punkt des Kreisumfanges, ON die Abscisse x, NF die Ordinate y desselben und CH

ein vom Mittelpunkt des Kreises auf diese Ordinate gefälltes Perpendikel, so ist offenbar

$$CH^2 + FH^2 = OF^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Es ist aber

$$CH = ON - OG = x - a$$
$$FH = FN - NH = FN - GC = y - b.$$

Setzt man diese Werthe von CH und FH in Gleichung (A), so kommt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Fig. 8. Fig. 9.

wenn CF, der Radius des Kreises, mit r bezeichnet wird, und diese Gleichung (2) ist die Gleichung eines Kreises, dessen Radius r ist und dessen Mittelpunkt a zur Abscisse und b zur Ordinate hat.

Aus der Gleichung (1) lassen sich nun sehr einfach mehrere schon aus der Elementargeometrie bekannte Sätze vom Kreis ableiten.

A. Aus Gleichung (1) folgt

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y^2 = (r + x)\,(r - x).$$

Die Ordinate y ist also die mittlere Proportionale zwischen $(r + x)$ und $(r - x)$ oder mit andern Worten: Wenn man in einem Punkte H, Fig. 7, eines Kreisdurchmessers ein Perpendikel errichtet, so ist das zwischen dem Punkte H und dem Kreisumfang liegende Stück HF dieses Perpendikels die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken NH und HP, in welche der Durchmesser durch den Punkt H getheilt wird.

B. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt N, Fig. 9, geht, ist (§. 6)

$$y = a\,(x + r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt P geht, ist

$$y = a'\,(x - r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Soll der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien auf dem Umfang des Kreises liegen, so müssen die Werthe von x und y, welche zugleich den Gleichungen (3) und (4) genügen, auch noch der Gleichung des Kreises (Gleichung 1) Genüge leisten. Durch Multiplication von (3) und (4) erhält man:

$$y^2 = aa' \, (x^2 - r^2) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Nach Gleichung (1) ist aber

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Mit denselben Werthen von x und y kann aber nur dann zugleich den Gleichungen (5) und (6) Genüge geleistet werden, wenn

$$aa' = -1$$

oder wenn

$$a' = -\frac{1}{a},$$

d. h. wenn der Durchschnittspunkt zweier durch die Endpunkte N und P eines Kreisdurchmessers gezogener Linien auf dem Kreisumfang liegen soll, so müssen sich die beiden Linien unter rechtem Winkel schneiden (§. 5).

Die Kreistangente. Eine gerade Linie 9

$$y = ax + b \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wird einen Kreis

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden, deren Coordinaten man durch Elimination aus den Gleichungen (7) und (8) findet. Setzt man den Werth von y aus Gleichung (7) in Gleichung (8), so erhält man nach einigen Umformungen

$$x = \frac{ab}{1 + a} \pm \sqrt{\frac{a^2 b^2}{(1 + a^2)^2} + \frac{r^2 - b^2}{1 + a^2}} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Wenn nun aber die gerade Linie bei (7) den Kreis nur in einem einzigen Punkte treffen soll, so müssen die beiden Werthe von x in Gleichung (9) in einen einzigen zusammenfallen, der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck muß also verschwinden. Setzt man aber den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck gleich Null, so ergiebt sich

$$b^2 = r^2 \, (1 + a^2) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Bezeichnen wir mit x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung einer jeden durch diesen Punkt gehenden geraden Linie (Gleichung 7, Seite 10)

$$y - y' = a \, (x - x')$$

oder

$$y = ax + y' - ax' \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Für den Werth von b in Gleichung (7) haben wir also

$$b = y' - ax'.$$

Setzt man das Quadrat dieses Werthes gleich dem Werthe von b^2 in Gleichung (10), nachdem man in demselben für r^2 seinen Werth $x'^2 + y'^2$ substituirt hat, so ergiebt sich nach einigen Umformungen

$$a = -\frac{x'}{y'}.$$

Setzt man diesen Werth von a in Gleichung (10), so erhält man als Gleichung der geraden Linie, welche den Kreis in den Punkten x' und y' berührt,

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Diese Gleichung der Kreistangente läßt sich noch etwas umformen; multiplicirt man auf beiden Seiten mit y', substituirt man alsdann r^2 für $x'^2 + y'^2$, so erhält man die Gleichung

$$yy' + xx' = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

welche ebenfalls die Gleichung einer Tangente ist, welche den Kreis, Gleichung (8), in dem Punkte berührt, dessen Coordinaten x' und y' sind.

Die Gleichung eines Radius im Kreise, Gleichung (8), welcher durch den Berührungspunkt $x'y'$ geht, erhalten wir, wenn wir in Gleichung (9), §. 7, $x'' = 0$ und $y'' = 0$ setzen; es ergiebt sich alsdann

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die durch Gleichung (14) repräsentirte Linie steht aber rechtwinkelig auf der durch Gleichung (12) dargestellten, weil der Factor von x in Gleichung (12) gleich ist dem negativen reciproken Werthe des Factors von x in Gleichung (14) (siehe §. 5) oder mit andern Worten: Die Tangente steht rechtwinkelig auf dem vom Berührungspunkte zum Mittelpunkte des Kreises gezogenen Radius.

Aufgabe. An einen Kreis durch einen außerhalb desselben gelegenen Punkt eine Tangente zu ziehen.

Nehmen wir den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises I, Fig. 10, zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist seine Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

In Fig. 10 sei F der Punkt, durch welchen eine Tangente an den Kreis I gezogen werden soll; seine Abscisse OH wollen wir mit m, seine Ordinate FH wollen wir mit n bezeichnen.

Nach dem vorigen Paragraphen ist die Gleichung einer Tangente an den Kreis I

$$xx' + yy' = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

Fig. 10.

wenn x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, welche außerdem noch der Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

Genüge leisten müssen. Soll die Linie Gleichung (b) durch den Punkt F gehen, dessen Coordinaten m und n sind, so muß man in Gleichung (b) auch m für x und n für y setzen können, wir haben also

$$mx' + ny' = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

Die Werthe von x' und y', welche den Gleichungen (c) und (d) zugleich Genüge leisten, also die Coordinaten des Berührungspunktes, könnte man einfach durch Elimination aus diesen Gleichungen (c) und (d) berechnen, wir wollen jedoch die Lösung auf anderem Wege versuchen.

Die Werthe von x' und y', welche den Gleichungen (c) und (d) Genüge leisten, müssen offenbar auch in eine jede Gleichung passen, welche man durch eine Combination der Gleichungen (c) und (d) erhalten kann. Zieht man Gleichung (d) von Gleichung (c) ab, so bleibt

$$x'^2 - mx' + y'^2 - ny' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(e)}$$

Addirt man auf jeder Seite des Gleichheitszeichens dieselbe Größe $1/_4\, m^2 + 1/_4\, n^2$, so kommt

$$x'^2 - mx' + 1/_4\, m^2 + y'^2 - ny' + 1/_4\, n^2 = 1/_4\, m^2 + 1/_4\, n^2$$

oder

$$(x' - {}^1/_2 m)^2 + (y' - {}^1/_2 n)^2 = {}^1/_4 m^2 + {}^1/_4 n^2 \quad . \; . \; . \quad (f)$$

Diese Gleichung (f) nun ist, wenn wir x' und y' als Variabele betrachten, die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $\sqrt{{}^1/_4 m^2 + {}^1/_4 n^2}$ ist, während die Coordinaten seines Mittelpunktes ${}^1/_2 m$ und ${}^1/_2 n$ sind.

Der gesuchte Berührungspunkt muß also auf dem Umfang dieses durch Gleichung (f) dargestellten Kreises liegen, den wir als den Kreis II bezeichnen wollen, er liegt also offenbar auf dem Durchschnittspunkte der Kreise I und II.

Um den Kreis II zu construiren, ziehe man die Linie OF, halbire dieselbe und ziehe um den Halbirungspunkt C einen Kreis mit dem Halbmesser CO.

Daß der so gezogene Kreis wirklich der durch Gleichung (f) dargestellte ist, ist leicht einzusehen, denn es ist $OD = {}^1/_2 OH = {}^1/_2 m$, $CD = {}^1/_2 HF = {}^1/_2 n$ und $OC^2 = OD^2 + DC^2 = ({}^1/_2 m)^2 + ({}^1/_2 n)^2$.

Da die Kreise I und II sich in zwei Punkten schneiden, so kann man von dem Punkte F zwei Tangenten an den Kreis I ziehen.

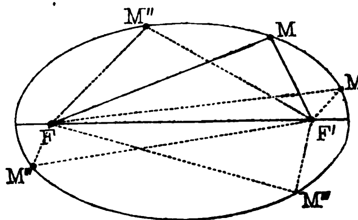
Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

---

10 **Definition der Ellipse.** Die Ellipse ist eine ebene Curve, welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt M (Fig. 11) derselben, die Summe der Abstände MF und MF' von zwei festen Punkten F und F' stets einer constanten Größe gleich ist.

Fig. 11.



Sind also M', M'', M''', Fig. 11, weitere Punkte derselben Ellipse, so ist $MF + MF' = M'F + M'F' = M''F + M''F' = M'''F + M'''F'$ u. s. w.

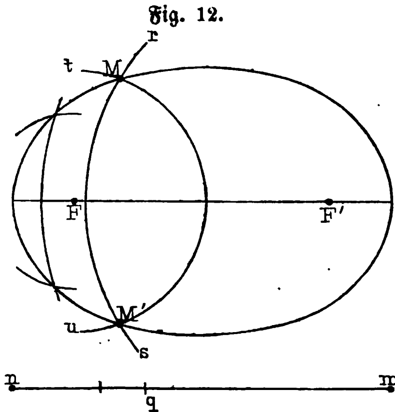
Die beiden Punkte F und F' führen den Namen der **Brennpunkte**. Eine von irgend einem Punkte M der Ellipse nach einem Brennpunkt gezogene Linie MF oder MF' wird ein **Leitstrahl**, radius vector, genannt. Für jeden Punkt der Ellipse giebt es also zwei Leitstrahlen und die Summe dieser beiden Leitstrahlen ist nach obiger Definition eine constante Größe.

Eine Ellipse ist bestimmt, wenn die Lage der beiden Brennpunkte und die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gegeben ist, und kann nach diesen Daten construirt werden, wie durch folgendes Beispiel erläutert wird.

Aufgabe. Es sei eine Ellipse zu construiren, deren Brennpunkte 3,4 Centimeter von einander abstehen und für welche die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gleich 5 Centimetern ist.

Auflösung. Auf einer geraden Linie trage man die beiden (in unserem Beispiel 3,4 Centimeter von einander entfernten) Brennpunkte F und F', Fig. 12, auf.

Fig. 12.



Auf einer benachbarten Linie schneide man ein Stück mn ab, welches der gegebenen Summe der beiden zusammengehörigen Leitstrahlen (in unserem Falle 5 Centimeter) gleich ist.

Nachdem dies geschehen ist, beschreibe man um den einen Brennpunkt F' einen Kreisbogen rs mit irgend einem Halbmesser, welcher kleiner ist als mn, schneide auf mn ein Stück mq ab, welches diesem Radius gleich ist, und beschreibe endlich mit dem Rest nq um den zweiten Brennpunkt F einen Kreisbogen tu. Die beiden Punkte M und M', in welchen sich diese beiden Kreisbogen schneiden, sind dann zwei Punkte der Ellipse.

Auf gleiche Weise kann man nun noch beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmen und über sie alsdann die Curve ziehen.

Zur Uebung construire man **vier** Ellipsen, für welche sämmtlich die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen 6 Centimeter ist; dagegen betrage der Abstand der beiden Brennpunkte:

für die erste	. . . .	5 Centimeter
» » zweite	. . . .	4 »
» » dritte	. . . .	3 »
» » vierte	. . . .	2 »

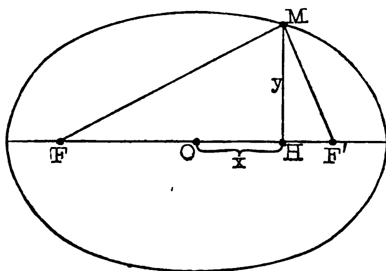
Nach Ausführung dieser Aufgaben wird man leicht übersehen, daß die Gestalt der Ellipse sich einem Kreise um so mehr nähert, je näher bei unveränderter Summe der zusammengehörigen Leitstrahlen die beiden Brennpunkte einander stehen.

Der Kreis ist eine Ellipse, für welche der Abstand der beiden Brennpunkte gleich Null geworden ist.

Aus der obigen Definition der Ellipse ergiebt sich auch ein mechanisches Verfahren, eine Ellipse in etwas größerem Maaßstabe etwa auf einer Tafel zu ziehen. Man schlägt an jede der beiden Stellen, welche die Brennpunkte der Ellipse werden sollen, einen Stift ein, befestigt an diesen Stiften die Enden einer Schnur, deren Länge gleich ist der Länge der beiden Leitstrahlen, spannt die Schnur mittelst eines Stiftes und bewegt dann den Stift in der Weise fort, daß die Schnur stets gespannt bleibt. Der Weg, welchen auf diese Weise die Spitze des Stiftes beschreibt, ist eine Ellipse.

11 **Gleichung der Ellipse.** Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der Ellipse läßt sich nun auch die Gleichung derselben ableiten. Nehmen wir die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte F und F', Fig. 13, zur Abscissenaxe, und den Punkt O, welcher in der Mitte zwischen F und F' liegt, zum Anfangspunkt der Coordinaten, so haben wir für den Punkt M die Coordinaten

Fig. 13.



$$OH = x$$
$$MH = y.$$

Es sei nun ferner

$$FM = l$$
$$F'M = l'$$
$$OF = OF' = E,$$

so haben wir

$$l^2 = (E + x)^2 + y^2 \quad . \quad . \quad (1)$$
$$l'^2 = (E - x)^2 + y^2 \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnen wir nun ferner die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen mit $2A$, so haben wir ferner

$$l + l' = 2A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und aus diesen drei Gleichungen kann man durch Elimination von l und l' eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y ableiten, welche die gesuchte Gleichung der Ellipse ist.

Ziehen wir Gleichung (2) von Gleichung (1) ab, so kommt

$$l^2 - l'^2 = (E + x)^2 - (E - x)^2$$
$$(l + l')(l - l') = 4Ex$$
$$2A(l - l') = 4Ex$$
$$(l - l') = \frac{2Ex}{A}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$l^2 - 2ll' + l'^2 = 4\frac{E^2x^2}{A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$l^2 + 2ll' + l'^2 = 4A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Addirt man die beiden Gleichungen (4) und (5), so kommt, wenn man auf beiden Seiten durch 2 dividirt,

$$l^2 + l'^2 = 2\left(\frac{E^2x^2}{A^2} + A^2\right);$$

durch Addition der Gleichungen (1) und (2) kommt aber

$$l^2 + l'^2 = 2(E^2 + x^2 + y^2),$$

also ist

$$\frac{E^2x^2}{A^2} + A^2 = E^2 + x^2 + y^2.$$

Setzen wir in dieser letzten Gleichung $A^2 - B^2$ an die Stelle von E^2, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als die gesuchte Gleichung der Ellipse.

Die Hauptaxen der Ellipse. Um die Durchschnittspunkte der 12
Ellipse mit der Abscissenaxe zu finden, haben wir in Gleichung (6) nur $y = 0$ zu setzen; wir erhalten alsdann

$$x = \pm A.$$

Die durch die beiden Brennpunkte gelegte Abscissenaxe schneidet also die Ellipse in zwei Punkten R und S, Fig. 14 (a. f. S.), welche um die Länge A vom Mittelpunkt O der Curve abstehen.

Die Länge $RS = 2A$ ist die große Axe der Ellipse. Da die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gleich $2A$ ist, so kann

man auch sagen, daß die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen der Ellipse gleich ist der großen Axe derselben.

Setzen wir in Gleichung (6) $x = 0$, so erhalten wir für die Durchschnittspunkte M und N, Fig. 14, der Ellipse mit der Ordinatenaxe

$$y = \pm B.$$

Der Abstand $2B$ der beiden Punkte M und N wird die kleine Axe der Ellipse genannt.

Da $FM = F'M$ und $FM + F'M = 2A$, so ist auch $FM = A$.

Wir haben oben angenommen, daß

$$E^2 = A^2 - B^2,$$

und in der That ist E die eine Kathete FO des rechtwinkeligen Dreiecks FOM, dessen Hypotenuse gleich A und dessen andere Kathete gleich B ist.

Der Abstand FO eines Brennpunktes von dem Mittelpunkt der Ellipse wird die Excentricität derselben genannt.

Fig. 14.

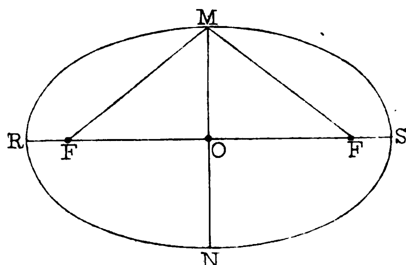
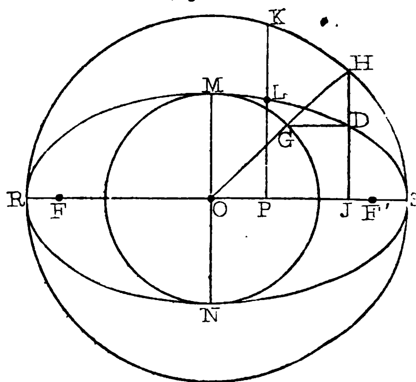


Fig. 15.



13 **Verhältniss der Ellipse zu einem über ihrer grossen Axe beschriebenen Kreise.** Aus Gleichung (6) ergiebt sich:

$$y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Wenn nun um den Mittelpunkt O einer Ellipse, Fig. 15, ein Kreis RKS gezogen wird, dessen Radius gleich ist der halben großen Axe der Ellipse, so ist seine Gleichung

$$Y^2 + X^2 = A^2,$$

wenn wir die Coordinaten des Kreises zum Unterschiede von denen der Ellipse durch große Buchstaben bezeichnen, und also

$$Y = \sqrt{A^2 - X^2}.$$

Setzen wir $X = x$, so haben wir

$$y : Y = \frac{B}{A} : 1$$

oder

$$y : Y = B : A,$$

d. h. die zu einer und derselben Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und des Kreises verhalten sich zu einander, wie die kleine Axe der Ellipse zu der großen.

Errichtet man also z. B. in P, Fig. 15, ein Perpendikel auf die große Axe, welches in L die Ellipse, in K den Kreis schneidet, so ist

$$PL : PK = B : A.$$

Darauf gründet sich ein weiteres Verfahren, eine Ellipse zu construiren, wenn die große und die kleine Axe derselben gegeben sind. Man beschreibe um den Punkt O, welcher der Mittelpunkt der zu construirenden Ellipse werden soll, zwei Kreise, den einen mit der kleinen, den andern mit der großen Axe als Halbmesser. Von irgend einem Punkte H des äußeren Kreises fälle man ein Perpendikel HJ auf die Linie, welche die große Axe der Ellipse werden soll, und ziehe den Radius HO; von dem Punkte G, in welchem dieser Radius den kleinen Kreis schneidet, fälle man ferner ein Perpendikel auf HJ, so ist der Fußpunkt D dieses Perpendikels ein Punkt der Ellipse, da

$$JD : JH = OG : OH$$

und also auch

$$JD : JH = B : A,$$

da ja $OG = B$ und $OH = A$.

Nach demselben Verfahren kann man nun so viel Punkte der Ellipse suchen, als nöthig sind, um die Curve mit Sicherheit ziehen zu können.

Zur Uebung construire man nach dieser Methode vier Ellipsen, deren große Axe für alle 8 Centimeter ist, während die kleine Axe

für die erste	7	Centimeter
» » zweite	5	»
» » dritte	4	»
» » vierte	3	»

beträgt.

Wie groß ist die Excentricität für jede dieser vier Ellipsen?

Die Ellipsentangente. Auf ähnliche Weise wie in §. 9 die Gleichung der Kreistangente entwickelt wurde, ließe sich nun auch die 14

Gleichung der geraden Linie ermitteln, welche eine Ellipse in einem gegebenen Punkte berührt. Da aber die Ausführung dieses Verfahrens ziemlich weitläufige Rechnungen erfordert, so wollen wir lieber sogleich eine allgemeine Methode entwickeln, nach welcher sich die Gleichung einer Tangente an irgend eine Curve, deren Gleichung gegeben ist, weit einfacher finden läßt.

Wenn die Gleichung einer Curve gegeben ist, so kann man dieselbe stets in solche Form bringen, daß y als Function von x ausgedrückt ist; so ergiebt sich z. B. aus der Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{1/2}.$$

Aus der Gleichung der Ellipse erhält man

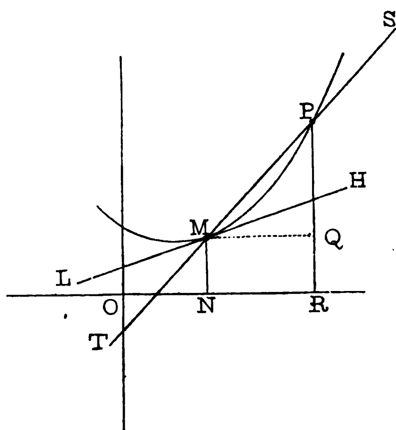
$$y = \frac{B}{A}(A^2 - x^2)^{1/2}$$

u. s. w. oder allgemein ist

$$y = f(x)$$

wo durch das Zeichen $f(x)$ ausgedrückt sein soll, daß y eine Function von x, d. h. eine irgend wie von x abhängige Größe sein soll.

Fig. 16



Es stelle nun Fig. 16 die Curve dar, welche der Gleichung $y = f(x)$ entspricht; ferner seien x' und y' die Coordinaten eines bestimmten Punktes M der Curve, so haben wir auch

$$y' = f(x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn nun x' (d. h. die Abscisse ON des Curvenpunktes M) um ein Stück $NR = h$ wächst, so ist nun die der Abscisse OR entsprechende Ordinate $RP = RQ + QP = y' + k$. Da nun aber P auch ein Punkt der Curve sein soll, haben wir auch

$$y' + k = f(x' + h).$$

Es läßt sich nun $f(x' + h)$ stets in einer nach steigenden Potenzen von h fortschreitenden Reihe entwickeln, was in vielen Fällen schon auf

ganz elementarem Wege möglich ist. Im Allgemeinen sind die Factoren der aufeinander folgenden Potenzen von h wieder Functionen von x', die wir der Reihe nach mit $f'(x')$, $f''(x')$, $f'''(x')$ u. s. w. bezeichnen wollen; wir haben also

$$y' + k = f(x') + f'(x')h + f''(x')h^2 + f'''(x')h^3 + \ldots$$

Ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung (1) ab, so bleibt

$$k = f'(x')h + f''(x')h^2 + f'''(x')h^3 + \ldots$$

woraus folgt

$$\frac{k}{h} = f'(x') + f''(x')h + f'''(x')h^2 + \ldots \quad (2)$$

Der Quotient $\frac{k}{h}$ ist aber (da $k = PQ$ und $h = MQ$) nichts anderes als die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die durch die beiden Curvenpunkte M und P gelegte Secante TS mit MQ oder mit der Abscissenaxe macht. Denken wir uns nun, daß h kleiner und kleiner wird, so rückt der Punkt P näher und näher an den Punkt M heran, um mit ihm ganz zusammenzufallen, wenn $h = 0$ wird. Für den Fall aber, daß P mit M zusammenfällt, geht aber die durch M und P gelegte Secante in eine Tangente über, welche die Curve in M berührt.

Betrachten wir den Werth des Quotienten $\frac{k}{h}$ in Gleichung (2), so ist klar, daß die mit h multiplicirten Glieder der Reihe um so kleiner werden, je kleiner h wird; für $h = 0$ reducirt sich aber der Werth jenes Quotienten auf $f'(x')$ und dieser Grenzwerth des Quotienten $\frac{k}{h}$, welchem sich derselbe um so mehr nähert, je kleiner h wird, ist natürlich die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die in M die Curve berührende Gerade LH mit der Abscissenaxe macht.

Suchen wir dies durch ein Beispiel zu erläutern. Die Gleichung einer Curve sei

$$y = m + nx^3.$$

Sind x' und y' die Coordinaten eines bestimmten Punktes der Kurve, so ist auch

$$y' = m + nx'^3.$$

Sind $x' + h$ und $y' + k$ die Coordinaten eines zweiten Punktes der Curve, so ist auch

$$y' + k = m + n(x' + h)^3$$
$$y' + k = m + nx'^3 + 3nx'^2h + 3nxh^2 + nh^3,$$
also auch
$$k = 3nx'^2h + 3nx'h^2 + nh^3$$
und
$$\frac{k}{h} = 3nx'^2 + 3nx'h + nh^2.$$

Der Grenzwerth, dem sich $\frac{k}{h}$ um so mehr nähert, je kleiner h wird, ist also in diesem Falle gleich $3nx'^2$, und dies ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die in $x'y'$ (d. h. in dem Punkte dessen Coordinaten x' und y' sind) die Curve berührende Gerade mit der Abscissenaxe macht. Die Gleichung dieser Berührenden ist demnach
$$y - y' = 3nx'^2(x - x'),$$
da wir in Gleichung (7) Seite 10 für a den Factor $3nx'^2$ zu setzen haben.

Wenden wir nun diese Methode auf die Bestimmung der Kreistangente an. Sind x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes, so haben wir
$$y' = (r^2 - x'^2)^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzen wir $y' + k$ für y' und $x' + h$ für h, so kommt
$$y' + k = [r^2 - (x' + h)^2]^{1/2} = (r^2 - x'^2 - 2x'h - h^2)^{1/2}.$$

Setzen wir $r^2 - x'^2 = z$ und $2x'h + h^2 = v$, so ist
$$y' + k = (z - v)^{1/2} = z^{1/2} - {}^1/_2 z^{-1/2}v + \dots$$
wenn man $(z - v)^{1/2}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt und nicht über die erste Potenz von v hinausgeht; werden nun für z und v wieder ihre alten Werthe substituirt, so ergiebt sich
$$y' + k = (r^2 - x'^2)^{1/2} - {}^1/_2 (r^2 - x'^2)^{-1/2} (2x'h + h^2)$$
$$y' + k = \sqrt{r^2 - x'^2} - \frac{x'h}{\sqrt{r^2 - x'^2}} - {}^1/_2 \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - x'^2}} \quad . \quad . \quad (4)$$

Wird Gleichung (3) von Gleichung (4) abgezogen, so bleibt
$$k = -\frac{x'h}{\sqrt{r^2 - x'^2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{r^2 - x'^2}} + \dots$$
also
$$\frac{k}{h} = \frac{x'}{\sqrt{r^2 - x'^2}} - \frac{h}{2\sqrt{r^2 - x'^2}} + \dots$$

mithin ist der gesuchte Grenzwerth des Quotienten $\frac{k}{h}$ gleich

$$-\frac{x'}{y'}$$

wenn man für $\sqrt{r^2 - x'^2}$ seinen Werth y' setzt. Die Gleichung einer Geraden, welche den Kreis in dem Punkte $x'y'$ berührt, ist demnach

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$$

übereinstimmend mit dem in §. 9 auf anderem Wege gefundenen Resultate.

Nach dieser Methode läßt sich nun auch leicht die Gleichung der Ellipsentangente bestimmen. Wenn x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes sind, so ist

$$y' = \frac{B}{A}(A^2 - x'^2)^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Sind $y' + k$ und $x' + h$ die Coordinaten eines zweiten Punktes auf der Ellipse, so ist

$$y' + k = \frac{B}{A}[A^2 - (x + h)^2]^{1/2}.$$

Nach der so eben beim Kreise vorgenommenen Entwickelung ist aber

$$[A^2 - (x + h)^2]^{1/2} = (A^2 - x'^2)^{1/2} - \frac{x'h}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{A^2 - x'^2}},$$

mithin auch

$$y' + k = \frac{B}{A}(A^2 - x'^2)^{1/2} - \frac{B}{A}\cdot\frac{x'h}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{B}{A}\cdot\frac{h^2}{2\sqrt{A^2 - x'^2}}$$

$$k = -\frac{B}{A}\cdot\frac{x'h}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{B}{A}\cdot\frac{h^2}{2\sqrt{A^2 - x'^2}}$$

$$\frac{k}{h} = -\frac{B}{A}\cdot\frac{x'}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{B}{A}\cdot\frac{h}{2\sqrt{A^2 - x'^2}}.$$

Setzt man in diesen Werth von $\frac{k}{h}$ für $\sqrt{A^2 - x'^2}$ den aus Gleichung (5) gezogenen Werth $\frac{Ay'}{B}$ und $h = 0$, so erhält man den Grenzwerth

$$-\frac{B^2 x'}{A^2 y'}$$

als den Werth für die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen

die gesuchte Berührende mit der Abscissenaxe macht. Die Gleichung der Tangente, welche die Ellipse in dem Punkt $x'y'$ berührt, ist also

$$y - y' = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'}(x - x') \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

15 **Beziehungen der Tangente zu den Leitstrahlen.** Die Gleichung eines Leitstrahls FM, Fig. 17, welcher durch den Brennpunkt F der Ellipse, dessen Coordinaten $y'' = 0$ und $x'' = -E$ sind, und durch einen Punkt M der Ellipse, dessen Coordinaten durch x' und y' bezeichnet werden, ist (Gleichung 9, Seite 10)

$$y - y' = \frac{y'}{x' + E}(x - x') \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels u, welchen die im Punkt M an die Ellipse gezogene Tangente ST mit dem Leitstrahl FM oder vielmehr mit seiner Verlängerung ML macht, findet man nach der Gleichung

$$tang.\, u = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

wenn man $a = \frac{y'}{x' + E}$ und $a' = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'}$ setzt; es ergiebt sich alsdann

$$tang.\, u = \frac{\frac{y'}{x' + E} + \frac{B^2 x'}{A^2 y'}}{1 - \frac{B^2 x' y'}{A^2 y'(x' + E)}}$$

$$tang.\, u = \frac{A^2 y'^2 + B^2 x'^2 + B^2 x' E}{A^2 y'(x' + E) - B^2 x' y'} = \frac{A^2 y'^2 + B^2 x'^2 + B^2 x' E}{(A^2 - B^2)x' y' + A^2 y' E}.$$

Setzt man $A^2 B^2$ für $A^2 y'^2 + B^2 x'^2$ und E^2 für $A^2 - B^2$, so kommt

$$tang.\, u = \frac{A^2 B^2 + B^2 x' E}{E^2 x' y' + A^2 y' E} = \frac{B^2 (A^2 + E x')}{E y' (A^2 + E x')},$$

oder endlich

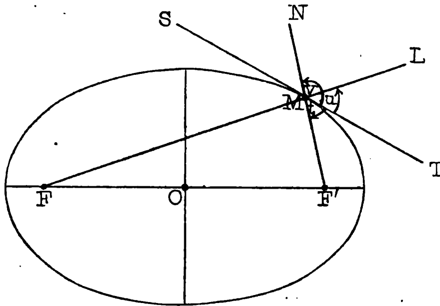
$$tang.\, u = \frac{B^2}{E y'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Um die trigonometrische Tangente des Winkels v zu finden, welchen die Berührende ST mit der Verlängerung des andern Leitstrahls $F'M$ macht, hat man in Gleichung (2) nur das Vorzeichen von E zu wechseln, es ergiebt sich alsdann

$$tang.\, v = -\frac{B^2}{E y'}.$$

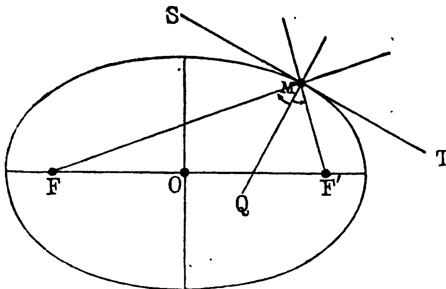
Der Winkel u ist also gleich dem Nebenwinkel von v, den wir mit t bezeichnen wollen. Die Tangente ST halbirt also den Winkel, welchen der eine Leitstrahl MF' mit der Verlängerung ML des andern macht.

Fig. 17.



Es ergiebt sich daraus ein einfaches Verfahren, durch einen gegebenen Punkt der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Zur Uebung ziehe man an einige der früher construirten Ellipsen Tangenten durch beliebig gewählte Berührungspunkte.

Fig. 18.



Eine durch den Berührungspunkt rechtwinkelig zur Tangente gezogene Gerade MN wird eine **Normale** genannt. Die **Normale** MN **halbirt den Winkel der beiden zum Berührungspunkt** M **gehörigen Leitstrahlen** MF **und** MF', wie sich aus dem Obigen leicht nachweisen läßt.

Durchschnittspunkt der Ellipsentangente mit der Abscis- 16
senaxe. Die Gleichung der Tangente, welche die Ellipse im Punkte $x'y'$ berührt, ist, wie im §. 14 gezeigt wurde,

$$y - y' = -\frac{B^2x'}{A^2y'}(x - x').$$

Setzen wir in dieser Gleichung $y = 0$, so ergiebt sich für den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenaxe

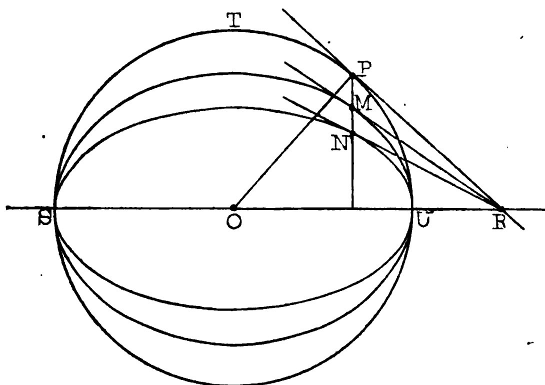
$$-A^2y'^2 = B^2x'^2 - B^2xx'$$
$$B^2xx' = B^2x'^2 + A^2y'^2 = A^2B^2,$$

also endlich

$$x = \frac{A^2}{x'}.$$

Die Lage des Punktes R, Fig. 19, in welchem die durch den Punkt M der Ellipse an dieselbe gezogene Tangente die Abscissenaxe schneidet, hängt also nur von den Werthen von A und x' ab, sie ist unabhängig von B, d. h. unabhängig vom Werth der kleinen Axe. Wenn also über derselben großen Axe verschiedene Ellipsen construirt sind und man in den Punkten P, M, N, in welchen eine mit der Ordinatenaxe parallel gezogene Linie die verschiedenen Ellipsen schneidet, Tangenten an dieselben zieht, so werden alle diese Tangenten die Abscissenaxe in dem nämlichen Punkte R schneiden.

Fig. 19.



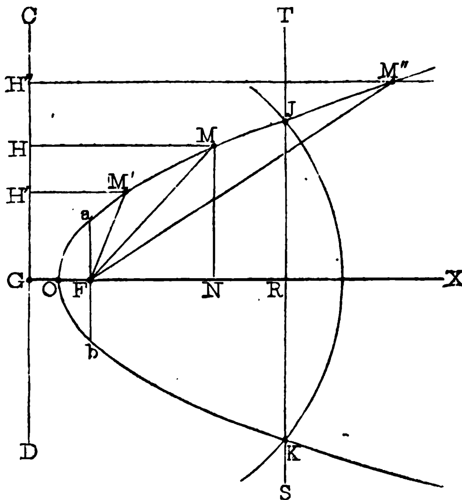
Daraus ergiebt sich ein einfaches Verfahren, durch einen gegebenen Punkt M einer Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Man ziehe um den Mittelpunkt O der Ellipse einen Kreis, dessen Radius gleich ist der großen Axe der Ellipse, ziehe alsdann durch M eine Linie rechtwinkelig zur Abscissenaxe und lege dann durch den Punkt P, in welchem dieses Perpendikel den Kreis schneidet, eine Tangente an den Kreis. Zieht man endlich vom Punkte R, in welchem die Kreistangente die Abscissenaxe schneidet, eine Linie nach M, so ist dies die verlangte Ellipsentangente.

Viertes Kapitel.

Die Parabel.

Die Gleichung der Parabel. Die Parabel ist eine ebene Curve, 17
welche die Eigenschaft hat, daß jeder Punkt M derselben gleich weit entfernt ist von einem festen Punkte F, Fig. 20, dem Brennpunkt der Parabel, und von einer geraden Linie CD, welche den Namen der Directrix führt. Es ist also der Leitstrahl FM gleich dem von M auf die Directrix gefällten Perpendikel MH.

Fig. 20.



Nehmen wir das durch F auf die Directrix gefällte Perpendikel GX zur Abscissenaxe, so ist es klar, daß der Punkt O, in welchem die Parabel die Abscissenaxe schneidet, in der Mitte zwischen G und F liegen muß, daß also $GO = OF$. Nehmen wir ferner den Punkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist ON die Abscisse x und NM die Ordinate y des Punktes M; es ist demnach, wenn man die Länge OF mit p bezeichnet,

$$HM = GN = x + p$$

oder

$$GN^2 = x^2 + 2px + p^2 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Es ist aber ferner auch

$$FM^2 = MN^2 + FN^2 = MN^2 + (ON - OF)^2$$
$$FM^2 = y^2 + (x - p)^2$$
$$FM^2 = y^2 + x^2 - 2px + p^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Da aber $FM = GN$ sein soll, so ist auch $FM^2 = GN^2$ oder $FM^2 - GN^2 = 0$. Zieht man aber Gleichung (1) von Gleichung (2) ab, so bleibt

$$y^2 - 4px = 0$$

oder es ist

$$y^2 = 4px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

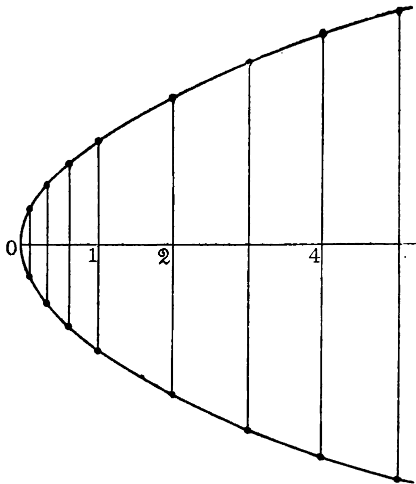
die gesuchte Gleichung der Parabel.

Um es anschaulich zu machen, wie eine solche Gleichung den Lauf einer krummen Linie darstellen kann, wollen wir für einen speciellen Werth von p die zusammengehörigen Werthe von x und y berechnen, welche der Gleichung (3) genügen; und dann dieselben als rechtwinkelige Coordinaten auftragen. Für $p = 1/2$ wird die Gleichung (3)

$$y^2 = 2x,$$

setzen wir in diese Gleichung der Reihe nach die in der ersten Columne der folgenden Tabelle verzeichneten Werthe von x, so ergeben sich die zugehörigen Werthe von y, wie sie in der zweiten Columne dieser Tabelle eingetragen sind.

Fig. 21.



x	y
0,1	0,45
0,3	0,77
0,6	1,09
1	1,41
2	2,00
3	2,45
4	2,83
5	3,16

Diese zusammengehörigen Werthe von x und y sind nun in Fig. 21 in der Art als Coordinaten aufgetragen, daß auf der Abscissenaxe OX die Punkte bezeichnet wurden, welche um die Länge $1/10$, $3/10$, $6/10$, 1, 2 u. s. w. Centi-

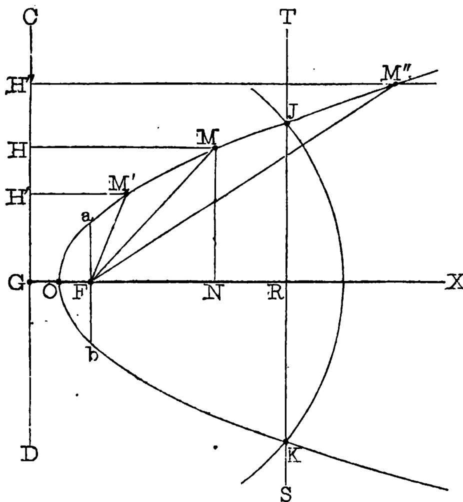
meter von O entfernt sind; in jedem dieser Punkte wurde alsdann ein Perpendikel errichtet und auf demselben der entsprechende Werth von y nach derselben Längeneinheit aufgetragen und endlich die so erhaltenen Gipfelpunkte der Ordinaten durch eine krumme Linie verbunden.

Jedem Abscissenpunkt entspricht ein positiver und ein negativer Werth von y, da ja $y = \pm \sqrt{2px}$.

Da y für negative Werthe von x imaginär wird, so erstreckt sich die Parabel von O aus nur nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin, nach dieser Seite aber ist sie unbegrenzt, da y für jeden noch so großen positiven Werth von x einen reellen Werth hat. — Den Punkt O wollen wir die Spitze der Parabel nennen.

Aus der oben gegebenen Definition der Parabel ergiebt sich folgendes Verfahren, diese Curve zu construiren, ohne erst die zusammengehörigen Werthe von x und y zu berechnen. Nachdem die Abscissenaxe gezogen, der Brennpunkt F, Fig. 22, und der Punkt G bezeichnet ist, in welchem die Directrix die Abscissenaxe schneidet, ziehe man durch einen beliebigen Punkt R der Abscissenaxe eine Linie ST rechtwinkelig zu GX und beschreibe alsdann mit der Länge RG als Radius um den Brennpunkt F einen Kreisbogen. Die beiden Durchschnittspunkte K und J dieses Kreisbogens mit dem Perpendikel ST sind nun zwei Punkte der Parabel, deren man auf dieselbe Weise noch beliebig viele finden kann.

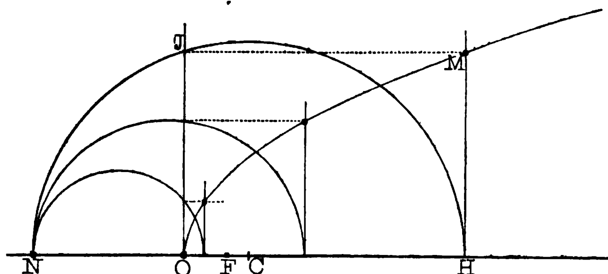
Fig. 22.



Eine andere Methode, die Parabel zu construiren, ergiebt sich aus ihrer Gleichung, denn nach dieser ist die Ordinate y die mittlere Proportionale zwischen x und $4p$. Nachdem man auf der Abscissenaxe den

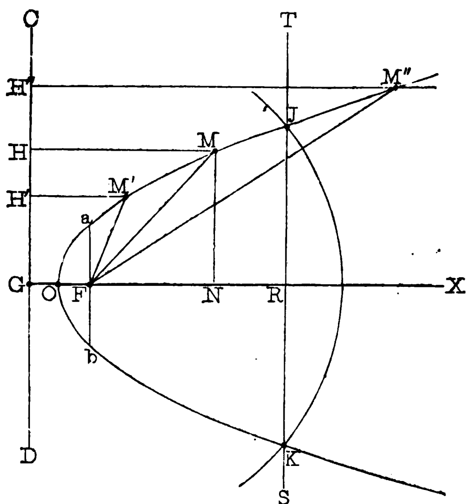
Brennpunkt F und die Spitze O, Fig. 23, der Parabel bezeichnet hat, trage man von O aus nach der negativen Seite der Abscissenaxe hin die

Fig. 23.



Länge $ON = 4\,OF$ auf. Soll nun der zur Abscisse OH gehörige Punkt der Parabel gesucht werden, so beschreibe man um den zwischen H und N in der Mitte liegenden Punkt C einen Kreis mit dem Radius CN und errichte in O ein Perpendikel, welches den Kreis in J schneidet. Errichtet man nun ferner in H ein Perpendikel auf der Abscissenaxe, so ist der Punkt M, in welchem dieses Perpendikel von einer parallel mit der Abscissenaxe durch J gezogenen Linie getroffen wird, ein Punkt der Parabel.

Fig. 24.



Für den Brennpunkt F ist $x = p$. Setzen wir diesen Werth von x in Gleichung (3), so kommt

$$y^2 = 4p^2$$
$$y = 2p.$$

Die zum Brennpunkt gehörige Ordinate Fa, Fig. 24, ist also gleich $2p$, also ist der dem Brennpunkt F entsprechende Durchmesser ab gleich $4p$.

Der parallel mit der Directrix durch den Brennpunkt gezogene Durchmesser ab der Parabel wird der **Parameter** derselben genannt.

Aufgabe. Man construire nach den beiden oben angegebenen Methoden Parabeln, deren Parameter 2, 3, 4 und 6 Centimeter ist.

Die Parabeltangente. Aus der Gleichung (3) S. 30 ergiebt sich 18

$$y = 2\sqrt{px} = 2p^{1/2}x^{1/2}.$$

Setzt man in dieser letzteren Gleichung $y + k$ an die Stelle von y und $x + h$ an die Stelle von x, so kommt

$$y + k = 2p^{1/2}(x + h)^{1/2}$$

$$y + k = 2p^{1/2}\left(x^{1/2} + {}^1/_2\,\frac{h}{x^{1/2}} + {}^1/_8\,\frac{h^2}{x^{1/2}} + \text{ꝛc.}\right).$$

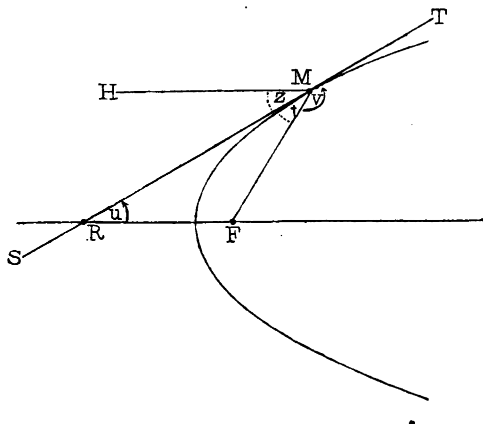
In der nach steigenden Potenzen von h geordneten Reihe ist also $2p^{1/2} \times \frac{1}{2x^{1/2}}$ oder $\sqrt{\frac{p}{x}}$ der Factor der ersten Potenz von h. Bezeichnen wir also mit u den Winkel, welchen eine im Punkte $x'y'$ an die Parabel gezogene Tangente mit der Abscissenaxe macht, so ist

$$tang.\, u = \sqrt{\frac{p}{x'}}.$$

Aus der Gleichung der Parabel ergiebt sich $x = \frac{y^2}{4p}$; setzen wir demnach an die Stelle von x' seinen Werth $\frac{y'^2}{4p}$, so kommt

$$tang.\, u = \frac{2p}{y'}.$$

Fig. 25.



Die Gleichung einer Geraden, welche die Parabel in dem Punkte $x'y'$ berührt, ist also

$$y - y' = \frac{2p}{y'}(x - x') \quad (1)$$

Die Gleichung eines Leitstrahles FM, Fig. 25, welcher durch den Brennpunkt F der Parabel geht, dessen Coordinaten sind $x'' = p$ und $y'' = 0$

und durch den Punkt M, Fig. 26, der Parabel, dessen Coordinaten sind x' und y', ist

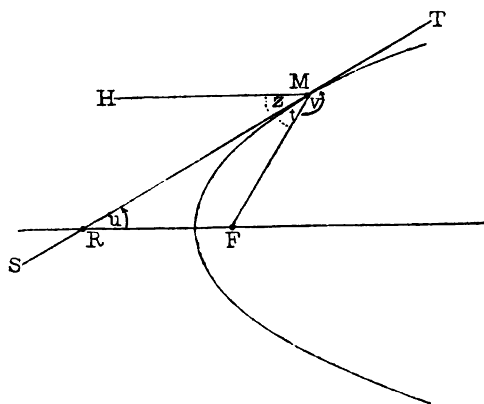
$$y - y' = \frac{y'}{x'-p}(x - x'),$$

oder, wenn man in dem Factor $\frac{y'}{x'-p}$ für x' seinen Werth $\frac{y'^2}{4p}$ setzt,

$$y - y' = \frac{4py'}{y'^2 - 4p^2}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Tangente des Winkels v, welchen der durch Gleichung (2) dargestellte Leitstrahl FM mit der Tangente ST (Gleichung 1) macht, ergiebt sich aus der Gleichung

Fig. 26.



$$tang.\, v = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

wenn man $\frac{2p}{y'}$ für a und $\frac{4py'}{y'^2 - 4p^2}$ für a' setzt. Nach Ausführung aller Reductionen findet man

$$tang.\, v = -\frac{2p}{y'}$$

es ist also auch

$$tang.\, v = -\, tang.\, u,$$

es ist also der Winkel u, welchen die Tangente ST mit der Abscissenaxe macht, gleich dem Nebenwinkel des Winkels v, welchen der Leitstrahl FM mit dem von M aufwärts gerichteten Theil der Tangente macht, es ist also $\measuredangle u = \measuredangle t$. Da aber ferner $\measuredangle z = \measuredangle u$ (als Wechselwinkel), so ist auch $\measuredangle t = \measuredangle z$; die Tangente ST halbirt also den Winkel, welchen der Leitstrahl FM mit der Linie MH macht, welche vom Berührungspunkt M parallel mit der Abscissenaxe nach der negativen Seite der x hin gezogen ist.

Auf die eben vorgetragenen Sätze gründen sich zwei Methoden, durch einen gegebenen Punkt M der Parabel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

1. Man ziehe vom Punkte M eine Gerade nach dem Brennpunkt F und eine zweite MH parallel mit der Abscissenaxe nach der negativen

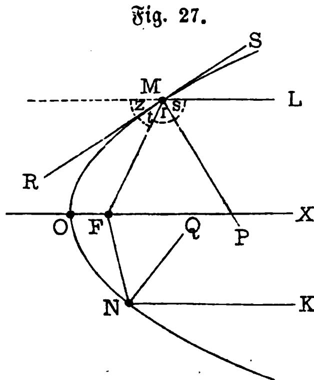
Seite der x hin. Die Halbirungslinie des Winkels HMF ist dann die verlangte Tangente.

2. Da $\measuredangle t = \measuredangle u$, so muß auch $RF = MF$ sein. Man ziehe also den zum Berührungspunkt M gehörigen Leitstrahl MF und schneide alsdann auf der Abscissenaxe von F nach der negativen Seite der x hin ein Stück FR ab, welches dem Leitstrahl FM gleich ist, so ist R der Punkt, in welchem die gesuchte Tangente die Abscissenaxe schneiden muß, RM also die Tangente selbst.

Zur Uebung ziehe man nach beiden Methoden Tangenten durch verschiedene Punkte der früher construirten Parabeln.

Eine durch den Berührungspunkt M rechtwinkelig zur Tangente gezogene Linie MP, Fig. 23, wird die Normale genannt. Wird nun von M aus eine Linie ML parallel mit der Abscissenaxe nach der positiven Seite der x hin gezogen, so ist nach dem Obigen leicht zu beweisen, daß der Winkel s, welchen die Normale mit ML macht, gleich ist dem Winkel r, welchen sie mit dem Leitstrahl MF macht, daß also die Normale den Winkel FML halbirt.

Fig. 27.



Wie man nach diesem Satz für einen gegebenen Punkt der Parabel die Normale ziehen kann, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

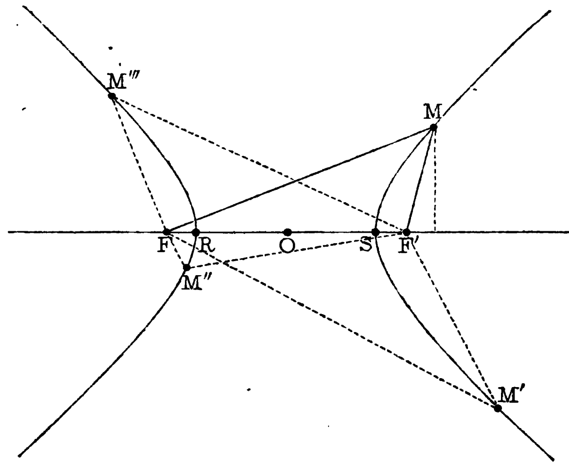
Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel.

---

19 **Definition und Construction der Hyperbel.** Die Hyperbel ist eine Curve, welche die Eigenschaft hat, daß die Differenz der beiden von einem Punkte M, Fig. 28, der Curve nach zwei festen

Fig. 28.



Punkten F und F' gezogenen Leitstrahlen einer constanten Größe gleich ist, die wir mit $2A$ bezeichnen wollen.

Sind also M', M'', M''' weitere Punkte derselben Hyperbel, Fig. 28, so ist

$$FM' - F'M' = FM - F'M = F'M'' - FM'' = F'M''' - FM''' = 2A.$$

Die beiden Punkte F und F' werden auch hier der Analogie wegen Brennpunkte genannt. Ihre Entfernung, welche wir mit $2E$ bezeichnen wollen, muß nothwendig größer sein als die Differenz $2A$; denn bezeichnen wir zwei zusammengehörige Leitstrahlen mit l und l', so sind

l, l' und $2E$ die drei Seiten eines Dreiecks, und da die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer sein muß als die dritte Seite, so ist auch

$$2E + l' > l.$$

Es ist aber auch $2A = l - l'$, also

$$2A + l' = l,$$

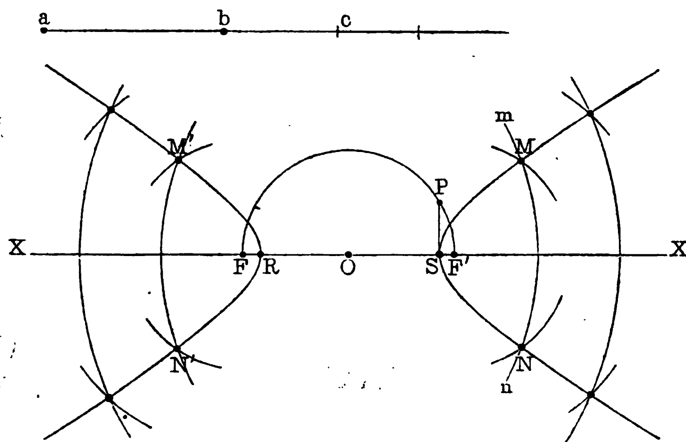
folglich auch

$$2E > 2A.$$

Ein Hyperbel ist durch den Abstand $2E$ der beiden Brennpunkte und die Differenz $2A$ zweier zusammengehörigen Leitstrahlen vollständig bestimmt und kann nach diesen Daten construirt werden.

Um diese Construction auszuführen, trage man auf eine gerade Linie XX, Fig. 29, die beiden Brennpunkte F und F' auf, bezeichne

Fig. 29.



den Punkt O, welcher zwischen beiden in der Mitte liegt, und trage von ihm aus auf jeder Seite die Länge OR und OS gleich A auf, so sind R und S die beiden Spitzen der Hyperbel. Da $FO = E$ und $OR = A$, so ist also auch $FR = E - A$.

Man schneide nun ferner auf einer benachbarten Linie die Länge $ab = 2A$ ab, beschreibe um den einen Brennpunkt F einen Kreisbogen mn mit einem beliebigen Radius, welcher größer ist als $E + A$, und schneide sodann auf der benachbarten Linie ein Stück ac ab, welches gleich ist dem Radius des Kreisbogens mn. Beschreibt man nun endlich um den andern Brennpunkt F' einen Kreisbogen mit dem Radius bc, so sind die beiden Punkte M und N, in welchen die beiden

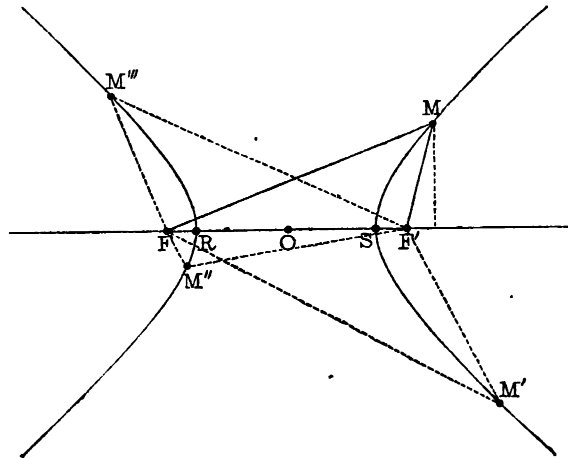
Kreise sich schneiden, zwei Punkte der Hyperbel. Ein zweites Paar von Punkten M' und N' findet man sodann, wenn man um den Punkt F' einen Kreis mit dem Radius ac, und um den Brennpunkt F einen Kreisbogen mit dem Radius bc beschreibt. Auf gleiche Weise lassen sich dann noch beliebig viele Punkte der Hyperbel finden.

Man construire auf diese Weise fünf Hyperbeln, für welche sämmtlich $2A = 4$ Centimeter ist. Der Abstand $2E$ der beiden Brennpunkte sei

für die erste	4,4	Centimeter,
» » zweite	4,6	»
» » dritte	5,0	»
» » vierte	6,0	»
» » fünfte	8,0	»

20 **Die Gleichung der Hyperbel.** Wir wollen, wie bei der Ellipse, die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte F und F', Fig. 30, zur

Fig. 30.



Abscissenaxe und den Punkt O, welcher zwischen F und F' in der Mitte liegt, zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen. Der Abstand $OF = OF'$ soll auch hier mit E bezeichnet werden. Bezeichnen wir ferner FM, Fig. 30, mit l, $F'M$ mit l', so haben wir (vergl. §. 11)

$$l^2 = (x + E)^2 + y^2$$
$$l'^2 = (x - E)^2 + y^2,$$

wozu noch die Gleichung

$$l - l' = 2A$$

kommt. Combiniren wir diese drei Gleichungen in derselben Weise, wie es mit den Gleichungen (1), (2) und (3) in §. 11 geschehen ist, so gelangen wir auch hier zu der Gleichung

$$\frac{E^2x^2}{A^2} + A^2 = E^2 + x^2 + y^2.$$

Setzen wir aber, da E nothwendig größer sein muß als A,

$$E^2 = A^2 + B^2,$$

so kommt nach Ausführung aller Reductionen

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

welches die Gleichung der Hyperbel ist. Sie unterscheidet sich von der Gleichung der Ellipse dadurch, daß alle mit B^2 multiplicirten Glieder das entgegengesetzte Vorzeichen der entsprechenden Glieder der Ellipsengleichung haben.

Aus Gleichung (1) ergiebt sich

$$y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{x^2 - A^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Nur für positive oder negative Werthe von x, welche größer sind als A, giebt diese Gleichung reelle Werthe von y; die Curve beginnt also einerseits erst in einem Punkte R, andererseits erst in einem Punkte S, welche beide um die Länge A vom Anfangspunkt O der Coordinaten abstehen. Für $x = \pm A$ wird aber $y = 0$, die Punkte R und S sind also zugleich die Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenaxe.

Da jeder beliebige positive oder negative Werth von x, wenn er nur größer ist als A, reelle Werthe von y giebt, so muß sich die Curve von S aus nach der positiven, von R aus nach der negativen Seite der x hin ins Unendliche erstrecken; die Curve besteht also, wie auch die im vorigen Paragraphen besprochene Construction darthut, aus zwei getrennten Aesten, deren einander zugekehrte Spitzen R und S um die Länge $2A$ von einander entfernt sind, welche die Hauptaxe der Hyperbel genannt wird.

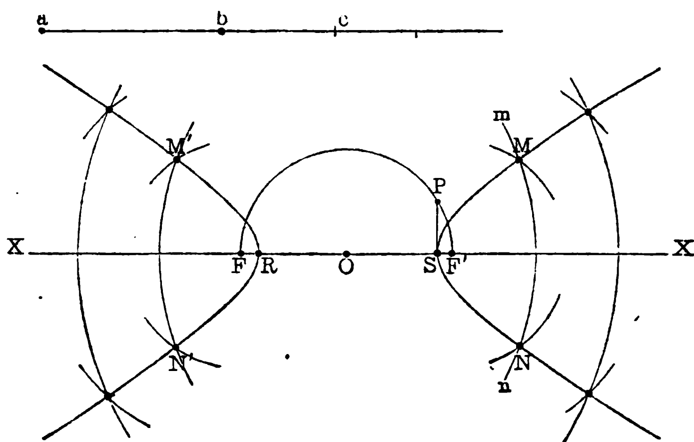
Die Größe B, die zweite Axe der Hyperbel, ist leicht durch Construction zu finden, denn es ist

$$B^2 = E^2 - A^2.$$

Man ziehe also um den Punkt O, Fig. 31 (a. f. S.), einen Kreis mit dem Halbmesser OF' und errichte in S ein Perpendikel auf der Abscissenaxe, so wird dieses Perpendikel den Kreis in einem Punkte P treffen; da nun

SP die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Hypotenuse $OP = E$ und dessen andere Kathete $OS = A$, so ist auch $SP = B$.

Fig. 31.



Wie groß ist B für die fünf Hyperbeln, welche am Schlusse des §. 19 zu construiren aufgegeben wurden?

Eine Hyperbel, für welche $A = B$, wird eine **gleichseitige Hyperbel** genannt.

Aufgabe. Man construire eine gleichseitige Hyperbel, für welche $A = B = 4$ Centimeter ist.

Wie groß ist E für diese Hyperbel?

21 **Die Tangente der Hyperbel.** Die Gleichung einer geraden Linie, welche die Hyperbel in einem Punkte M, Fig. 32, berührt, dessen Coordinaten x' und y' sind, ließe sich nach der bei der Ellipse und der Parabel angewandten Methode leicht ermitteln, wir kommen aber noch leichter zum Ziel, wenn wir zufolge der zwischen der Hyperbel und der Ellipse bestehenden Relation in der Gleichung der Ellipsentangente (Gleichung (6) Seite 26) das Vorzeichen des mit B^2 multiplicirten Gliedes in das entgegengesetzte verwandeln; es ergiebt sich alsdann

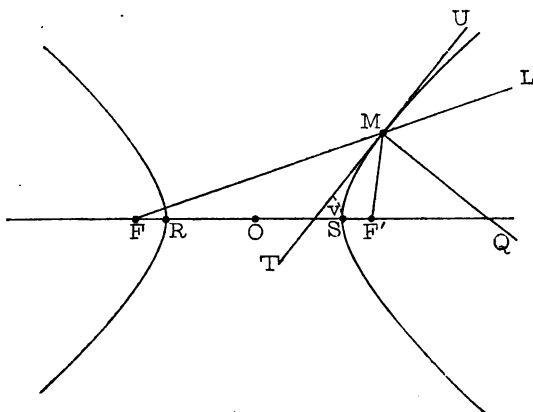
$$y - y' = \frac{B^2 x'}{A^2 y'}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

als die Gleichung der Hyperbeltangente.

Analog mit der Ellipse ergiebt sich alsdann auch, daß die Tangente

TU, Fig. 32, welche die Hyperbel in dem Punkte *M* berührt, den Winkel *FMF'* der beiden zu *M* gehörigen Leitstrahlen halbirt.

Fig. 32.



Ebenso ergiebt sich, daß die Normale *MQ* des Hyperbelpunktes *M* den Winkel halbirt, welchen der Leitstrahl *F'M* mit der Verlängerung *ML* des andern Leitstrahles macht.

Zur Uebung ziehe man Tangenten und Normale durch beliebige Punkte der nach den früheren Angaben construirten Hyperbeln.

Die trigonometrische Tangente des Winkels v, welchen die im Punkte $x'y'$ die Hyperbel berührende Gerade mit der Abscissenaxe macht, ist nach Gleichung (1) $\frac{B^2 x'}{A^2 y'}$, oder, wenn man für y' seinen Werth setzt,

$$tang. v = \frac{B x'}{A \sqrt{x'^2 - A^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Der Punkt, in welchem die Tangente die Abscissenaxe schneidet, wird gefunden, wenn man in Gleichung (1) $y = 0$ setzt. Es ergiebt sich alsdann

$$- A^2 y'^2 = B^2 x x' - B^2 x'^2$$

$$A^2 y'^2 - B^2 x'^2 = B x x',$$

und da $x'y'$ ein Punkt der Hyperbel ist,

$$A^2 B^2 = B^2 x x'$$

$$x = \frac{A^2}{x'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Asymptoten. Nach Gleichung (3) wird x um so kleiner, 22
je größer x' wird, d. h. der Durchschnittspunkt der Tangente mit der

Abscissenaxe nähert sich dem Mittelpunkt O der Hyperbel um so mehr, je weiter der Berührungspunkt wegrückt, für $x' = \infty$ wird $x = 0$.

Dividirt man Zähler und Nenner des Werthes von *tang.* v in Gleichung (2) des vorigen Paragraphen durch x', so kommt

$$tang.\, v = \frac{B}{A\sqrt{1 - \frac{A^2}{x'^2}}}$$

ein Werth, welcher für $x' = \infty$ in

$$tang.\, v' = \pm \frac{B}{A}$$

übergeht. Wird also in S, Fig. 33, ein Perpendikel errichtet, nach oben und unten die Länge $SP = SQ = B$ aufgetragen, so sind die von O über P und Q gezogenen Geraden LN und $L'N'$ die Tangenten, welche die beiden Arme der Hyperbel in unendlicher Entfernung berühren werden. Diese den Abscissen $x' = \pm \infty$ entsprechenden Tangenten werden die Asymptoten der Hyperbel genannt.

Zwischen den Asymptoten und den entsprechenden Hyperbelzweigen findet eine um so größere Annäherung statt, je weiter man sich vom Mittelpunkte O der Hyperbel entfernt.

Für einen Punkt der Hyperbel haben wir

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2 - B^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

für einen Punkt der Asymptote dagegen ist

$$y = \frac{B}{A} x$$

oder

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Bezeichnen wir mit y' die Ordinate JK eines Hyperbelpunktes, welche einer bestimmten Abscisse entspricht, mit y'' die Ordinate JH eines zu derselben Abscisse gehörigen Punktes der Asymptoten, so erhält man durch Abziehen der Gleichung (1) von Gleichung (2)

$$y''^2 - y'^2 = B^2$$

$$(y'' - y')\,(y'' + y') = B^2$$

$$y'' - y' = \frac{B^2}{y'' + y'}.$$

Der Abstand $HK = y'' - y'$ zwischen der Asymptote und dem Hyperbelarm wird also um so kleiner, je größer y' und y'' wird; er wird

gleich 0 für $x = \infty$, da für $x = \infty$ auch y' und y'' unendlich groß werden.

Fig. 33.

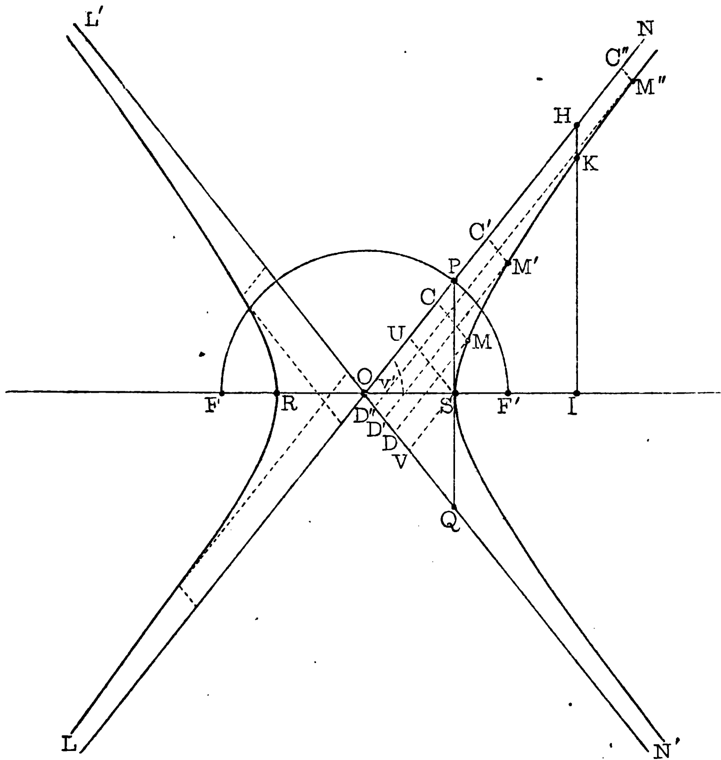
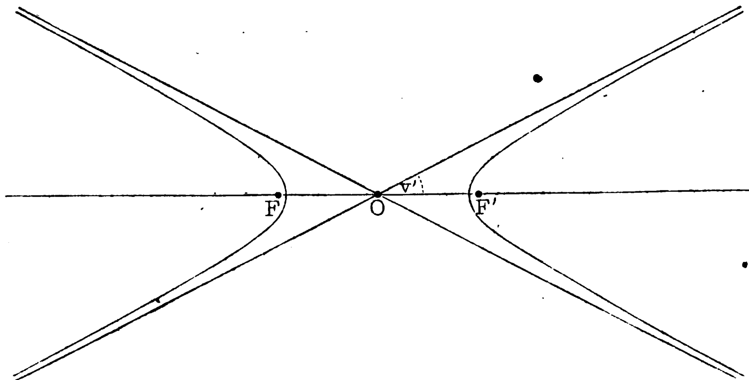


Fig. 34.



Die Annäherung der Hyperbelarme an die Asymptoten ist in Fig. 34

schon sehr deutlich zu ersehen, weil für diese Hyperbel bei gleichem Werth von A der Werth der zweiten Axe B viel kleiner ist, als für die in

Fig. 35.

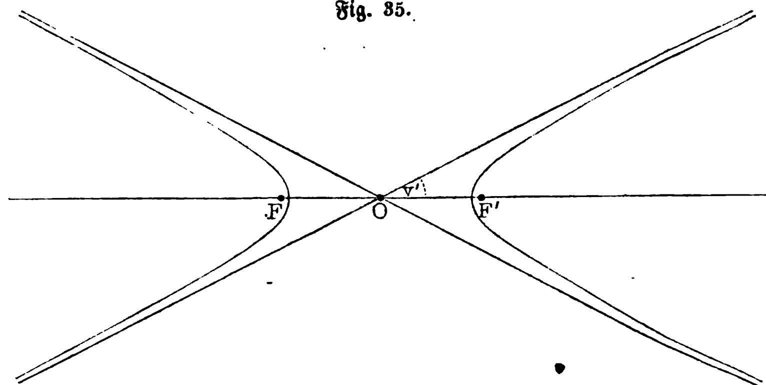


Fig. 33 gezeichnete Hyperbel, also der Werth $y'' - y' = \frac{B^2}{y'' + y'}$ unter sonst gleichen Umständen für die Hyperbel Fig. 35 viel kleiner sein muß, als für die Hyperbel Fig. 33.

Wir werden später noch andere wichtige Eigenschaften der Asymptoten kennen lernen.

Sechstes Kapitel.

Transformation der Coordinaten.

---

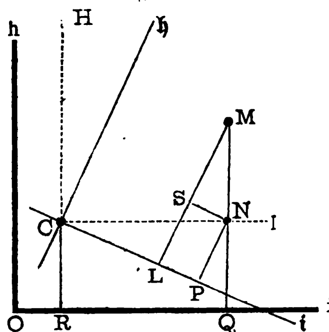
23 **Die Coordinaten eines Punktes bezogen auf verschiedene Axensysteme.** In Beziehung auf die Coordinatenaxen Oh und Oi, Fig. 36, sind $OQ = x$ und $MQ = y$ die Coordinaten des Punktes M.

Bezogen auf ein zweites Axensystem, dessen Axen CH und CJ mit den entsprechenden Axen des ersteren parallel laufen, ist $CN = X$ die Abscisse und $NM = Y$ die Ordinate des Punktes M. Sind nun $OR = a$ und $CR = b$ die Coordinaten des Anfangspunktes C des zweiten Axensystems bezogen auf das erste, so ist offenbar

$$\left.\begin{array}{l} Y = y - b \\ X = x - a \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Denken wir uns aber ferner durch denselben Punkt C ein drittes

Fig. 36.



System rechtwinkeliger Axen $C\mathfrak{h}$ und $C\mathfrak{i}$ gelegt, so sind $CL = \mathfrak{x}$ und $LM = \mathfrak{y}$ die Coordinaten des Punktes M in Beziehung auf dieses dritte Axensystem.

Es ist nun

$$\mathfrak{y} = LS + SM$$
$$\mathfrak{x} = CP - LP.$$

Wird der Winkel iCJ, welchen die Axe der $\mathfrak{x}$ mit der Axe der X macht, mit α bezeichnet, so ist

$$LS = PN = CN.\sin.\alpha = X.\sin.\alpha$$
$$SM = MN.\cos.\alpha \quad = Y.\cos.\alpha$$
$$CP = CN.\cos.\alpha \quad = X.\cos.\alpha$$
$$LP = SN = MN.\sin.\alpha = Y.\sin.\alpha,$$

also endlich

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{y} = X.\sin.\alpha + Y.\cos.\alpha \\ \mathfrak{x} = X.\cos.\alpha - Y.\sin.\alpha\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Setzen wir für X und Y ihre obigen Werthe, so kommt

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{y} = (x - a)\sin.\alpha + (y - b)\cos.\alpha \\ \mathfrak{x} = (x - a)\cos.\alpha - (y - b)\sin.\alpha\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

oder umgekehrt

$$\left.\begin{array}{l}y = b + \mathfrak{y}\cos.\alpha - \mathfrak{x}\sin.\alpha \\ x = a + \mathfrak{y}\sin.\alpha + \mathfrak{x}\cos.\alpha\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ist nun

$$\mathfrak{y} = f(\mathfrak{x})$$

die Gleichung irgend einer Curve in Beziehung auf das dritte der obigen Coordinatensysteme, so hat man nur für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe bei (3) zu setzen, um die Gleichung derselben Curve in Beziehung auf das erste Axensystem zu erhalten.

Es sei z. B.

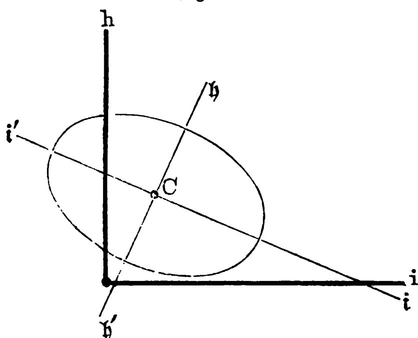
$$A^2\mathfrak{y}^2 + B^2\mathfrak{x}^2 = A^2B^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

die Gleichung einer auf das dritte Axensystem bezogenen Ellipse, Fig. 37 (a. f. S.) so haben wir nur die oben angedeuteten Substitutionen zu machen, um die Gleichung der Ellipse auf das erste Axensystem bezogen zu erhalten.

Wir wollen hier die angedeutete Substitution nicht durchführen, sondern nur untersuchen, welche Form die Gleichung der Ellipse durch eine solche Transformation der Coordinaten annehmen wird.

Wenn man den bei (3) gegebenen Werth von $\mathfrak{y}$ auf das Quadrat erhebt, so erhält man einen Ausdruck, dessen einzelne Glieder multiplicirt sind mit den variabeln Factoren x^2, y^2, xy, x und y; endlich kommen auch noch Glieder vor, welche nicht mit einem variabeln Factor behaftet sind. Dasselbe gilt von dem aufs Quadrat erhobenen Werthe von $\mathfrak{x}$; substituirt man also in die Gleichung (5) für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe bei (3), so wird die Gleichung nothwendig die Form

Fig. 37.



$$Cx^2 + Dy^2 + Exy + Fx + Gy = H \quad . \quad . \quad (6)$$

annehmen.

Zu einer Gleichung derselben Form, nämlich zu einer Gleichung, in welcher ein Glied vorkommt behaftet mit x^2, eines mit y^2, eines mit xy, eines mit x, eines mit y und endlich eines ohne variabeln Factor, gelangt man aber auch, wenn man die Gleichung der Parabel und die Gleichung der Hyperbel in gleicher Weise transformirt, wie es oben für die Ellipse angedeutet wurde; man gelangt ebenfalls zu einer Gleichung von der bei (6) gegebenen Form, welche sich von der Gleichung der Ellipse nur durch das Größenverhältniß und die Vorzeichen der constanten Factoren C, D, E, F, G und H unterscheiden werden.

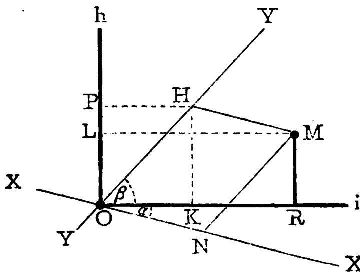
Die allgemeinste Form einer Gleichung zweiten Grades, wie sie bei (6) gegeben ist, repräsentirt also je nach dem Werth der constanten Factoren eine Parabel, eine Hyperbel oder eine Ellipse (der Kreis ist nur ein specieller Fall der Ellipse) und durch Uebergang von dem Axensystem, auf welches sich die Gleichung (6) bezieht; zu einem andern passend gewählten (durch geeignete Transformation der Coordinaten) kann man die Gleichung auf eine einfachere Gestalt zurückführen, und zwar gelangt man, je nach den speciellen Werthen der Factoren C, D, E u. s. w. entweder zu Gleichung (6) §. 11, oder zu Gleichung (3) §. 17, oder endlich zu Gleichung (1) §. 20. Ohne solche Transformationen durchzuführen, können wir aus diesen Andeutungen doch schon den Schluß ziehen:

Daß jede Gleichung des zweiten Grades zwischen den ver-

änderlichen Größen x und y, bezogen auf rechtwinkelige Coordinaten, entweder eine **Ellipse** oder eine **Parabel** oder eine **Hyperbel** darstellt.

Schiefwinkelige Coordinaten. Wir haben bisher stets ange- 24
nommen, daß der Winkel, welchen die beiden Coordinatenaxen mit einander machen, ein rechter sei; man kann aber die Lage eines Punktes in der Ebene auch dadurch bestimmen, daß man ihn auf schiefwinkelige Coordinaten bezieht. Es seien XX und YY, Fig. 38, die sich schiefwinkelig schneidenden Coordinatenaxen, so findet man die Coordinaten eines Punktes M in Beziehung auf dieses System, indem man durch M eine Linie parallel mit der Axe der Y zieht. Ist N der Punkt, in welchem diese Linie die Abscissenaxe trifft, so ist $ON = x$ die Abscisse und $NM = y$ die Ordinate des Punktes M.

Fig. 38.



Suchen wir nun die Beziehung zu ermitteln, welche stattfindet zwischen den schiefwinkeligen Coordinaten xy des Punktes M und den Coordinaten $OR = \mathfrak{x}$ und $RM = \mathfrak{y}$ bezogen auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen Oh und Oi, deren Durchschnittspunkt mit dem Anfangspunkt O des schiefwinkeligen Coordinatensystems zusammenfällt.

Es sei α der Winkel, welchen die Axe OX macht mit der Axe Oi, und β der Winkel, welchen die Axe OY macht mit der Axe Oi.

Von M werde ein Perpendikel ML auf die Axe der $\mathfrak{y}$ gefällt, MH parallel mit XX gezogen und von H gleichfalls ein Perpendikel HP auf Oh gefällt, so ist

$$\mathfrak{y} = RM = OL = OP - PL$$
$$OP = OH . sin. \beta = y . sin. \beta$$
$$PL = HM . sin. \alpha = x . sin. \alpha,$$

also auch

$$\mathfrak{y} = y . sin. \beta - x . sin. \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Man fälle ferner von H das Perpendikel HK auf die Axe Oi, so hat man

$$\mathfrak{x} = OR = OK + KR$$
$$OK = OH.\cos.\beta = x.\cos.\beta$$
$$KR = HM.\cos.\alpha = x.\cos.\alpha,$$

also auch

$$\mathfrak{x} = y.\cos.\beta + x.\cos.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Um von rechtwinkeligen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ auf schiefwinkelige xy überzugehen, hat man nur für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre obigen Werthe bei (1) und (2) zu setzen.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es nun leicht, die Gleichung der Hyperbel für den Fall zu entwickeln, daß man die Asymptoten als Coordinatenaxen betrachtet. Die Gleichung der Hyperbel, wie wir sie oben kennen lernten, ist

$$A^2\mathfrak{y}^2 - B^2\mathfrak{x}^2 = -A^2B^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wenn wir mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die rechtwinkeligen Coordinaten bezeichnen. Um die Gleichung der Hyperbel für schiefwinkelige Coordinaten zu erhalten, deren Anfangspunkt gleichfalls der Mittelpunkt der Hyperbel ist, hat man nur in die obige Gleichung der Hyperbel für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe bei (1) und (2) zu setzen. Sollen aber die Asymptoten selbst jene schiefwinkelig sich schneidenden Axen sein, so ist offenbar $\beta = \alpha$, die Gleichung (3) wird also nach jener Substitution

$$A^2(y - x)^2 \sin.\alpha^2 - B^2(y + x)^2 \cos.\alpha^2 = -A^2B^2 \quad .\,. \quad (4)$$

Nun aber ist (§. 22)

$$\tang.\alpha = \frac{B}{A}$$
$$\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \frac{B}{A}$$
$$A.\sin.\alpha = B.\cos.\alpha,$$

demnach ergiebt sich aus Gleichung (4)

$$4A^2\sin.\alpha^2.xy = A^2B^2$$

oder

$$xy = \frac{B^2}{4\sin.\alpha^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nun aber ist

$$\frac{\sin.\alpha^2}{\cos.\alpha^2} = \frac{B^2}{A^2}$$
$$\frac{\sin.\alpha^2}{1 - \sin.\alpha^2} = \frac{B^2}{A^2}$$
$$A^2.\sin.\alpha^2 = B^2(1 - \sin.\alpha^2)$$
$$(A^2 + B^2)\sin.\alpha^2 = B^2$$

$$sin.\alpha^2 = \frac{B^2}{A^2 + B^2},$$

und wenn man diesen Werth von $sin.\alpha^2$ in Gleichung (5) substituirt, so kommt

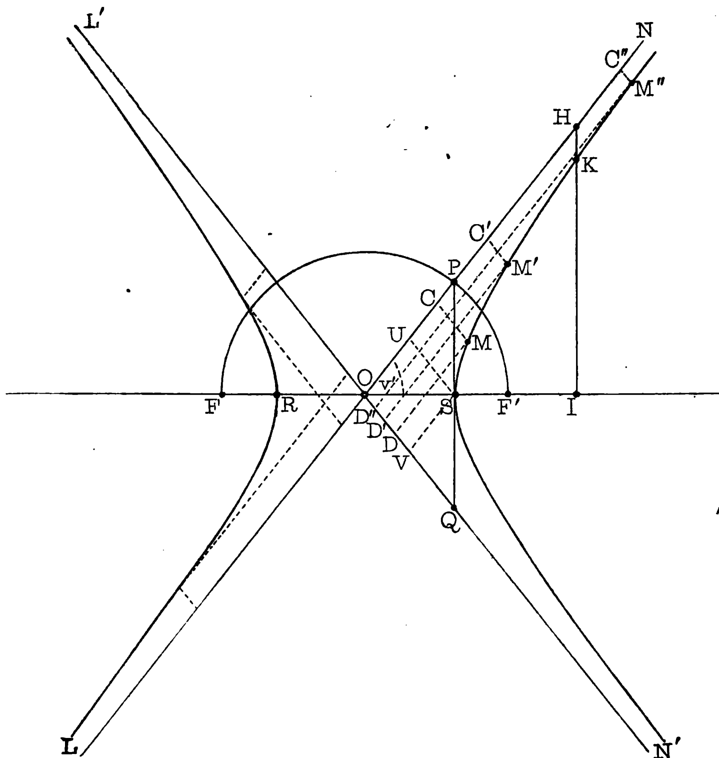
$$xy = \frac{A^2 + B^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder

$$xy = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn wir für den constanten Werth $\frac{A^2 + B^2}{4}$ einfach den Buchstaben C setzen.

Fig. 39.

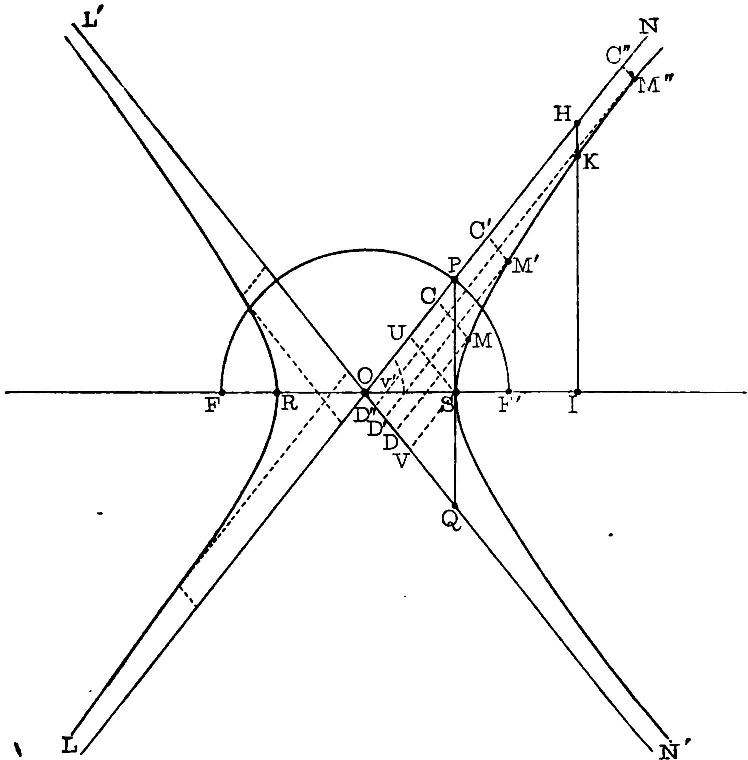


Diese Gleichung (6) oder (7) ist nun die auf ihre Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel.

Zieht man also durch irgend einen Punkt M, Fig. 39, einer Hyperbel zwei Linien MC und MD parallel mit den beiden Asymptoten, so ist das Product der beiden Ordinaten MC und MD stets dasselbe.

Der Inhalt des Parallelogramms $MCDO$ ist aber $MC \times MD \,.\, sin.\, 2\,\alpha$, wenn α der Winkel ist, welchen eine Asymptote mit der Hauptaxe der

Fig. 40.



Hyperbel macht, also $2\,\alpha$ der Winkel ist, welchen die beiden Asymptoten mit einander machen. Bezeichnen wir den Inhalt dieses Parallelogramms mit J, so haben wir also

$$J = x \,.\, y \,.\, sin.\, 2\,\alpha,$$

also auch

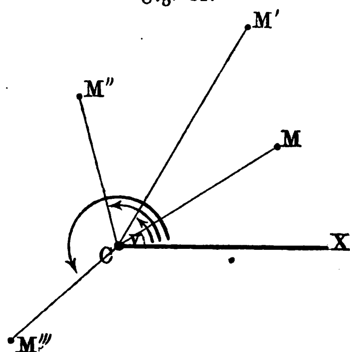
$$J = \frac{A^2 + B^2}{4} \,.\, sin.\, 2\,\alpha.$$

Der Inhalt des Parallelogramms $MCDO$ ist also unveränderlich derselbe, wo auch der Punkt M auf der Hyperbel liegen mag. Es sind also die Parallelogramme $MCOD$, $M'C'OD'$, $M''C''OD''$ u. s. w., Fig. 40, sämmtlich einander gleich und zwar gleich dem Inhalt der Raute $SOUV$, welche man erhält, wenn man vom Scheitel S der Hyperbel die Linien SU und SV parallel mit den Asymptotenaxen zieht.

Für die gleichseitige Hyperbel wird $2\alpha = 90^0$, also $\sin. 2\alpha = 1$ und $A = B$. Die besprochenen Parallelogramme werden alsdann längliche Rechtecke, deren Inhalt gleich $\frac{A^2}{2}$ ist.

Polarcoordinaten. Die Lage eines Punktes M, Fig. 41, in der 25
Ebene kann auch dadurch bestimmt werden, daß man seinen Abstand MC von einem in derselben Ebene liegenden festen Punkte C angiebt und den Winkel, welchen dieser Leitstrahl (radius vector) CM mit einer festen geraden Linie CX macht.

Fig. 41.



Die Länge des Leitstrahles CM wollen wir mit r, den Winkel MCX aber wollen wir mit v bezeichnen.

Um auf diese Weise Punkte in allen Theilen der Ebene, auch unterhalb der Linie CX bestimmen zu können, ohne in der Richtung der Winkelzählung eine Aenderung eintreten zu lassen, muß man die Winkel auch noch über 180^0 hinaus zählen, wie z. B. für den Punkt M''', Fig. 41, der Winkel v größer ist als 180^0.

Unter Umständen wird die Winkelzählung selbst noch über 360^0 hinaus fortgesetzt, wie wir unten bei der Construction der archimedischen Spirale sehen werden.

Zur Uebung trage man, nachdem man auf dem Papier den Punkt C markirt und die Linie CX gezogen hat, die durch folgende zusammengehörige Werthe von v und r bestimmten Punkte auf.

v	r	v	r
30^0	4^{cm}	210^0	$1{,}4^{cm}$
70^0	$2{,}5^{cm}$	250^0	$3{,}6^{cm}$
140^0	3^{cm}	320^0	$2{,}9^{cm}$

Der feste Punkt C, von welchem aus die Länge der Leitstrahlen gemessen wird, wird der Pol genannt. Die Bestimmungsstücke, welche

nach dieser Methode der Ortsbestimmung nöthig sind, um die Lage eines Punktes in der Ebene festzustellen, nämlich die Länge r des Leitstrahles und der Winkel v, welchen er mit der Anfangslinie CX macht, werden die Polarcoordinaten des Punktes genannt.

Wenn man von irgend einem Punkte M einer ebenen Curve, Fig. 42, nach einem zum Pol gewählten Punkte C zieht, so wird die Länge r dieses Leitstrahles eine andere werden, wenn man von einem Punkte M der Curve zu anderen Punkten M', M'' u. s. w. derselben übergeht, die Länge r des Leitstrahles ist also von seiner Richtung abhängig; da aber die Richtung des Leitstrahles durch den Winkel v bestimmt ist, so ist also r von v und umgekehrt v von r abhängig.

Fig. 42.

Die Abhängigkeit zwischen r und v, durch welche die Bedingung ausgesprochen wird, daß der durch die zusammengehörigen Werthe von r und v bezeichnete Punkt einer bestimmten Curve angehören soll, wird auch hier durch eine Gleichung zwischen r und v ausgedrückt, welche man die Polargleichung der Curve nennt und deren allgemeinste Form

$$r = f(v)$$

ist, welche ausdrückt, daß r eine Function von v ist.

Um klar zu machen, wie durch eine Gleichung zwischen r und v der Lauf einer Curve bestimmt werden kann, wollen wir die Curve näher betrachten, deren Gleichung ist

$$r = nv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung, in welcher n einen constanten Factor bezeichnet, stellt eine Curve dar, welche die Eigenschaft hat, daß die Länge eines Leitstrahles stets proportional ist der Größe des Winkels, welchen er mit der Anfangslinie CX macht.

Diese Curve ist unter dem Namen der archimedischen Spirale bekannt.

Setzen wir in Gleichung (1) $n = 0{,}05$, so ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von v (in Graden ausgedrückt) und r:

v	r	v	r	v	r
0	0	160	8	360	18
20	1	200	10	400	20
40	2	240	12	440	22
80	4	280	14	480	24
120	6	320	16	520	26

Fig. 43.

u. s. w. In Fig. 43 ist diese Curve in der Weise gezeichnet, daß die obigen Werthe von r als Millimeter aufgetragen sind. Zur Uebung zeichne man die Curve in der Weise, daß die obigen Werthe von r als pariser (oder irgend andere) Linien aufgetragen werden, wobei nur noch zu bemerken ist, daß es, um die Curve sicherer ziehen zu können, gut sein wird, auch noch die Werthe von r zu berücksichtigen, welche den Werthen $v = 60^0, 100^0, 140^0$ u. s. w. entsprechen.

Die Polargleichung der Parabel. Nehmen wir den Brennpunkt 26
der Parabel zum Pol der Polarcoordinaten, die Axe derselben zur Anfangslinie der Winkelzählung, so ist MF, Fig. 44 (a. f. S.), der Leitstrahl r des Punktes M, welcher zum Winkel v (Winkel MFN) gehört. Für den Punkt M ist aber $MN = y$ die Ordinate und $ON = x$ die Abscisse, wenn man den Gipfel der Parabel zum Anfangspunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems nimmt. Nun ist aber offenbar

$$y = r \,.\, sin.\, v \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$x = OF + FN$$

oder

$$x = p + r\; cos.\, v \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wenn p den Abstand des Brennpunktes vom Gipfel bezeichnet. Die Gleichung der Parabel für rechtwinkelige Coordinaten, deren Anfangspunkt im Gipfel der Curve liegt, ist aber

$$y^2 = 4px.$$

Setzen wir in diese Gleichung für x und y ihre Werthe bei (2) und (1), so kommt

$$r^2 \sin. v^2 = 4p\,(p + r \cos. v);$$

addirt man auf beiden Seiten $r^2 \cos. v^2$, so kommt

$$r^2 \sin. v^2 + r^2 \cos. v^2 = 4p^2 + 4pr \cos. v + r^2 \cos. v^2$$

$$r^2 = (2p + r \cos. v)^2$$

$$r = 2p + r \cos. v$$

$$r\,(1 - \cos. v) = 2p$$

$$r = \frac{2p}{1 - \cos. v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und dies ist die gesuchte Polargleichung der Parabel, wenn der Brennpunkt zum Pol gewählt wird. Für $v = 0$ erhält man nach dieser Gleichung $r = \infty$. Für $v = 90^0$ wird $r = 2p$ und für $v = 180^0$ wird $r = p$.

Fig. 44.

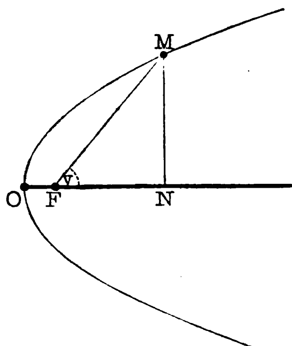
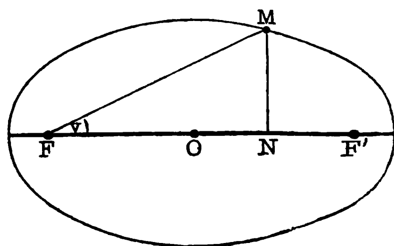


Fig. 45.



27 **Polargleichung der Ellipse und Hyperbel.** Nehmen wir den Brennpunkt F der Ellipse, Fig. 45, zum Pol der Polarcoordinaten, die Hauptaxe der Ellipse zur Anfangsrichtung der Winkelzählung, so ist $FM = r$ der Leitstrahl des Punktes M, welcher mit der Anfangslinie den Winkel $MFF' = v$ macht.

Für das rechtwinkelige Coordinatensystem, welches wir in §. 11 bei Entwickelung der Gleichung der Ellipse zu Grunde legten, ist $MN = y$

die Ordinate und $ON = x$ die Abscisse des Punktes M. Nun aber ist, wie leicht zu übersehen,

$$y = r . sin. v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ferner ist

$$FN = r . cos. v;$$

es ist aber

$$FN = E + x,$$

wenn E wie früher den Abstand des Brennpunktes F vom Mittelpunkt O der Ellipse bezeichnet. Folglich ist auch

$$x = r . cos. v - E$$

oder

$$x = r . cos. v - Ae \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn wir Ae für E setzen. Da $B^2 = A^2 - E^2$, so ist demnach auch $B^2 = A^2 - A^2 e^2$ oder $B^2 = A^2 (1 - e^2)$. Substituiren wir diesen Werth von B^2 in die Gleichung der Ellipse (Gl. 6, §. 11), so kommt:

$$A^2 y^2 + A^2 (1 - e^2) x^2 = A^2 . A^2 (1 - e^2)$$

oder

$$y^2 + (1 - e^2) x^2 = A^2 (1 - e^2) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

eine veränderte Form der Gleichung der Ellipse, wenn ihre Hauptaxen zu Coordinatenaxen genommen werden, welche zum Uebergang auf Polarcoordinaten vortheilhafter ist, als die ursprüngliche Form der Ellipsengleichung.

Setzen wir in Gleichung (3) für y und x ihre Werthe bei (1) und (2), so kommt

$$r^2 sin. v^2 + (1 - e^2)(r cos. v - Ae)^2 = A^2 (1 - e^2)$$

$$r^2 sin. v^2 + r^2 cos. v^2 - 2 Aer cos. v + A^2 e^2$$
$$- e^2 r^2 cos. v^2 + 2 Ae^3 r cos. v - A^2 e^4 = A^2 (1 - e^2)$$

$$r^2 - e^2 r^2 cos. v^2 - 2 Aer cos. v (1 - e^2) + A^2 e^2 (1 - e^2) = A^2 (1 - e^2)$$

$$r^2 (1 - e^2 cos. v^2) - 2 Aer cos. v (1 - e^2) = A^2 (1 - e^2)^2$$

$$r^2 (1 - e^2 cos. v^2) = A^2 (1 - e^2)^2 + 2 A (1 - e^2) er cos. v;$$

addirt man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $e^2 r^2 cos. v^2$, so kommt

$$r^2 (1 - e^2 cos. v^2) + e^2 r^2 cos. v^2 = A^2 (1 - e^2)^2$$
$$+ 2 A (1 - e^2) er cos. v + e^2 r^2 cos. v^2$$

$$r^2 = [A (1 - e^2) + er cos. v]^2$$

$$r = A (1 - e^2) + er cos. v$$

$$r (1 - e cos. v) = A (1 - e^2)$$

$$r = \frac{A (1 - e^2)}{1 - e cos. v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

die gesuchte Polargleichung der Ellipse, in welcher e jederzeit kleiner sein muß als 1, da $E < A$.

Hätte man den andern Brennpunkt F', Fig. 39, zum Pol der Polarcoordinaten gewählt, so würde man

$$r = \frac{A(1 - e^2)}{1 + e \cos. v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

als Polargleichung der Ellipse gefunden haben.

Für $e = 0$ wird

$$r = A$$

und dies ist die Polargleichung des Kreises.

Nach demselben Verfahren, welches wir für die Ellipse angewendet haben, findet man aber auch

$$r = \frac{A(1 - e^2)}{1 \pm e \cos. v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

für die Polargleichung der Hyperbel, und zwar gilt das obere oder untere Vorzeichen im Nenner, je nachdem man den einen oder andern Brennpunkt der Hyperbel zum Pol wählt.

Für die Hyperbel ist e stets größer als 1.

Dieselbe Gleichung (6) stellt also entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, je nachdem $e < 1$ oder $e > 1$ ist.

Siebentes Kapitel.

Curven höherer Ordnung und transscendente Curven.

---

28 **Parabeln verschiedener Ordnung.** Wir haben gesehen, daß jede Gleichung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y, auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen, eine gerade Linie darstellt, während jede Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Variabeln entweder eine Parabel oder eine Ellipse oder eine Hyperbel repräsentirt, je nach dem Größenverhältniß und den Vorzeichen der constanten Factoren.

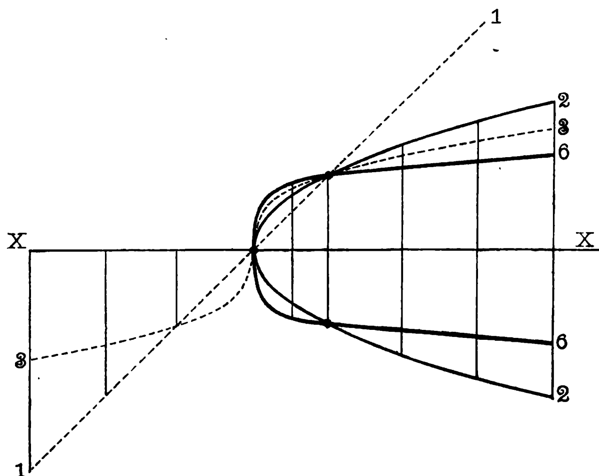
Alle Curven, deren Gleichung höhere Potenzen von x und y enthält, werden Curven höherer Ordnung genannt und es giebt deren unzählig viele, von denen wir nur einige der einfachsten betrachten wollen.

Alle Curven, deren Gleichung in die allgemeine Form

$$y^n = ax^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

passen, in welcher a, n und m constante Größen bezeichnen, werden unter dem gemeinschaftlichen Namen der Parabeln zusammengefaßt. Streng genommen gehört also auch die gerade Linie unter die Zahl der Parabeln, denn Gleichung (1) geht in die Gleichung einer geraden Linie über, wenn $n = m = 1$. Die Parabel zweiter Ordnung, für welche $m = 1$ und $n = 2$, wird vorzugsweise Parabel genannt, und nur diese im vierten Kapitel näher besprochene krumme Linie ist gemeint, wenn man ohne weitere Bezeichnung von einer Parabel redet. Sobald in Gleichung (1) m und n irgend welche andere Werthe haben als 1 und 2, stellt dieselbe eine Parabel höherer Ordnung dar.

Fig. 46.



In Fig. 46 sind vier Curven zusammengestellt, welche der Gleichung

$$y^n = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

entsprechen. Als Längeneinheit ist bei Construction dieser Curven das Centimeter angenommen worden. Für $n = 1$ stellt Gleichung (2) eine gerade Linie dar, welche einen Winkel von 45° mit der Abscissenaxe macht.

Für $n = 2$ stellt Gleichung (2) die gewöhnliche Parabel dar. Im Falle $n = 2$ giebt Gleichung (2) folgende zusammengehörige Werthe von x und y, nach welchen man die Curve auftragen kann:

x	y
0,2	0,45
0,5	0,72
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2

Ist in Gleichung (2) $n = 3$, so haben wir mit einer Parabel dritter Ordnung zu thun, wir erhalten nach der Gleichung $y^3 = x$ folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
0,2	0,59
0,5	0,79
1	1
2	1,26
4	1,59

Für $n = 6$ geht Gleichung (2) über in

$$y^6 = x$$

und dieser Gleichung entsprechen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
0,2	0,76
0,5	0,89
1	1
4	1,26

Für $x = 0$ ergiebt sich bei allen der Gleichung (2) angehörigen Curven auch $y = 0$, für $x = 1$ ergiebt sich auch für alle $y = 1$.

Zur Uebung construire man die Curven, deren Gleichung ist:

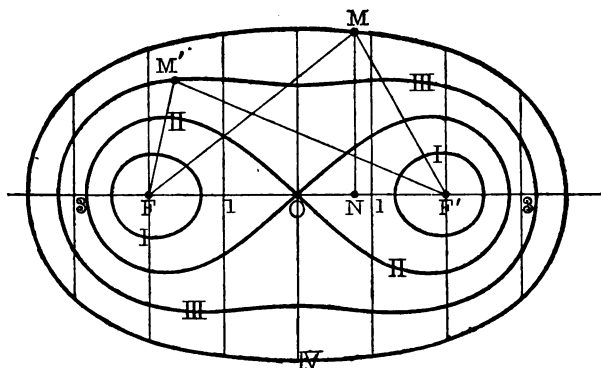
$$y^2 = 2x$$
$$y^3 = 2x$$
$$y^4 = 2x,$$

indem man für x der Reihe nach in diesen Gleichungen setzt $^2/_{10}$, $^5/_{10}$, 1, 2 und 4, die zugehörigen Werthe von y berechnet und aufträgt, wobei man etwa den badischen Zoll als Längeneinheit annehmen kann.

Wir können hier nicht weiter auf die Besprechung der Eigenschaften der Parabeln höherer Ordnung eingehen.

Die Lemniscate. Die Lemniscate ist eine krumme Linie, 29
welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt M, Fig. 47,

Fig. 47.



derselben das Product $MF \times MF'$ der Abstände desselben von zwei festen Punkten F und F' stets einer constanten Größe gleich ist.

Wir wollen den Abstand der beiden Punkte F und F' mit $2E$ und den constanten Werth des Productes $MF \times MF'$ mit A^2 bezeichnen. — Nehmen wir die Verbindungslinie der beiden festen Punkte F und F' zur Abscissenaxe und den Punkt O derselben, welcher zwischen F und F' in der Mitte liegt, zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Abscisse des Punktes M gleich $ON = x$ und die Ordinate desselben $NM = y$; wir haben also

$$FM^2 = (E + x)^2 + y^2$$
$$F'M^2 = (E - x)^2 + y^2,$$

es ist also nach der Definition der Lemniscate

$$[(E + x)^2 + y^2]\,[(E - x)^2 + y^2] = A^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine Gleichung vierten Grades als Gleichung der Lemniscate. Nach einigen Reductionen ergiebt sich aus Gleichung (1)

$$x^2 + y^2 + E^2 = \sqrt{4\,E^2x^2 + A^4}$$

und daraus

$$y = \sqrt{(- x^2 - E^2 + \sqrt{4\,E^2x^2 + A^4})} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für den Durchschnittspunkt der Curve mit der Abscissenaxe ist $y = 0$, also

$$x^2 + E^2 = \sqrt{4\,E^2x^2 + A^4}$$
$$x^4 + 2\,E^2x^2 + E^4 = 4\,E^2x^2 + A^4$$
$$x^4 - 2\,E^2x^2 + E^4 = A^4$$
$$x^2 - E^2 = \pm\,A^2$$
$$x = \pm\sqrt{E^2 \pm A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gleichung (3) giebt vier Werthe für x, von denen aber zwei als imaginär wegfallen, sobald $A > E$. Für $A = E$ giebt Gleichung (3) drei reelle Werthe für x, von denen einer gleich Null. Für $A > E$ hat also die Curve 2, für $A = E$ hat sie 3, für $A < E$ endlich hat sie 4 Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe gemein, woraus man schon übersehen kann, daß der Charakter der Curve ein wesentlich anderer sein wird, je nachdem A größer, gleich oder kleiner als E ist. Um dies anschaulicher zu machen, wollen wir den Verlauf der Curve nach Gleichung (2) für specielle Werthe von E und A verfolgen, und zwar wollen wir für alle folgenden Beispiele $E = 2$ (Centimeter) annehmen, dagegen für A der Reihe nach verschiedene Werthe setzen.

I. $E = 2$, $A = 1{,}5$, also $A < E$. Für diese Werthe der Coefficienten E und A wird Gleichung (2)

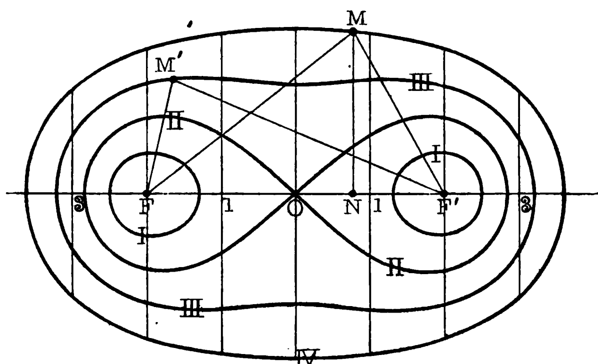
$$y = \sqrt{(- x^2 - 4 + \sqrt{16\,x^2 + 5{,}06)}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dieser Gleichung entsprechen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
$\pm$ 1,32	0
$\pm$ 2	$\pm$ 0,55
$\pm$ 2,5	0

Für positive oder negative Werthe von x, welche kleiner sind als 1,32 und größer als 2,5, giebt Gleichung (4) für y nur imaginäre Werthe. Die Curve besteht demnach aus zwei gesonderten in sich geschlossenen Stücken, wie man dies Fig. 48 sieht, in welcher die um F und F' ge-

Fig. 48.



zogenen mit I bezeichneten ringförmigen Figuren der Gleichung (4) entsprechen. Bei der Construction dieser Figur ist ebenso wie bei der Construction der Curven II, III und IV das Centimeter zur Längeneinheit angenommen worden.

II. $E = 2$, $A = 2$, also $A = E$. Für diesen Fall geht Gleichung (2) über in

$$y = \sqrt{(-x^2 - 4 + \sqrt{16x^2 + 16})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Gleichung genügen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
0	0
± 1	± 0,81
± 2	± 1
± 2,83	0

wonach die mit II bezeichnete Curve in Fig. 48 construirt ist; sie besteht aus zwei in sich geschlossenen Stücken, welche in O zusammenstoßen.

III. $E = 2$, $A = 2{,}5$, also $A > E$. Für diesen Fall geht Gleichung (2) über in

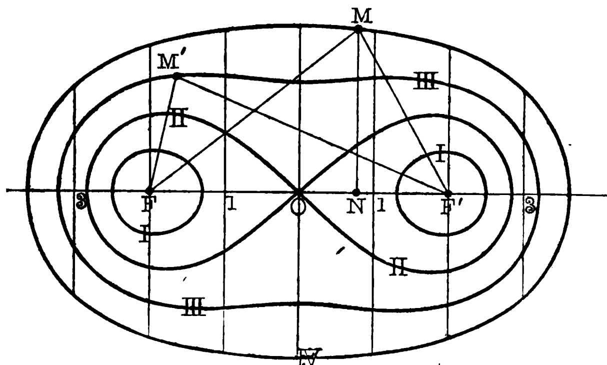
$$y = \sqrt{(-x^2 - 4 + \sqrt{16x^2 + 38,9})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welcher Gleichung folgende zusammengehörige Werthe von x und y genügen:

x	y
0	± 1,5
± 1	± 1,55
± 2	± 1,45
± 3	± 0,72
± 3,2	0

Die nach Gleichung (6) construirte Curve ist in Fig. 49 mit III bezeichnet. Die beiden für $A < E$ getrennten Curvenstücke vereinigen sich hier zu einer einzigen geschlossenen Curve.

Fig. 49.



IV. $E = 2$, $A = 3$, also gleichfalls $A > E$. Für diese Werthe von E und A wird aus Gleichung (2) die Gleichung

$$y = \sqrt{(-x^2 - 4 + \sqrt{16x^2 + 81})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welcher folgende zusammengehörige Werthe von x und y gehören:

x	y
0	$\pm$ 2,25
$\pm$ 1	$\pm$ 2,2
$\pm$ 2	$\pm$ 2,00
$\pm$ 3	$\pm$ 1,41
$\pm$ 3,6	0

wonach die Curve IV in Fig. 49 construirt ist.

Die Lemniscate Gleichung (2) zerfällt also in zwei getrennte geschlossene Curven, so lange $A < E$; sie bildet aber eine einzige geschlossene Curve, sobald $A > E$.

Eine weitere Besprechung der Curven höherer Ordnung gehört nicht hier her.

Transscendente Curven. Mit dem Namen der transscendenten 30
Curven bezeichnet man diejenigen, in deren Gleichung die Ordinate y als eine Exponentialfunction, als eine logarithmische Function oder als trigonometrische Function der Abscisse x erscheint. Man kann diese Curven am einfachsten in der Weise construiren, daß man die zusammengehörigen Werthe von x und y aus der Gleichung berechnet und als rechtwinkelige Coordinaten aufträgt, wie wir dies beispielsweise für zwei solcher Curven ausführen wollen.

Es sei die Gleichung

$$y = 2^x \ldots$$

zu construiren. Dieser Gleichung entsprechen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
— 4	0,062
— 3	0,125
— 2	0,25
— 1	0,5
0	1,0

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

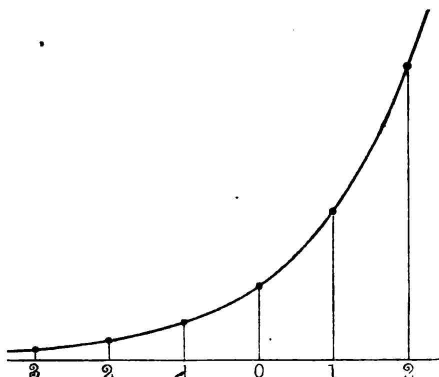
wonach die Curve, Fig. 50 (a. f. S.), das Centimeter als Längeneinheit nehmend, construirt ist.

Um die Gleichung

$$y = n \, . \, sin. \, x$$

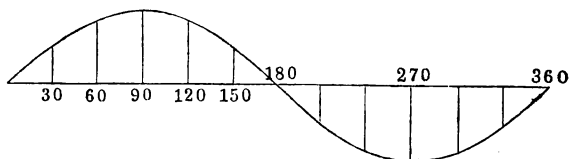
zu construiren, muß man sich erst darüber entscheiden, welche Längeneinheit man zum Auftragen der Winkelgrößen x wählen will. Längen und Winkel sind verschiedene Dinge, welche nicht mit derselben Einheit gemessen werden können, sie sind incommensurabel. Wenn man also die x der Gleichung $y = n \, . \, sin. \, x$ als Abscissen auftragen will, so kann dies nur in sofern geschehen, daß man eine der Winkelgröße x proportionale Länge aufträgt. So ist denn in Fig. 51 die Gleichung

Fig. 50.



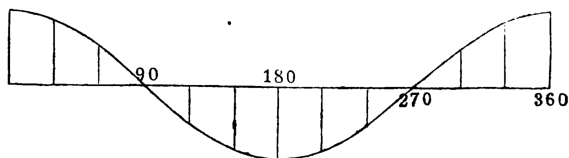
$$y = sin. \, x$$

Fig. 51.



in der Weise construirt, daß für eine Winkelgröße von 90° eine Länge von 18^{mm}, also für 10° die Länge von 2^{mm} aufgetragen ist. Zur Einheit der Ordinaten ist das Centimeter gewählt.

Fig. 52.



In gleicher Weise repräsentirt Fig. 52 die Gleichung

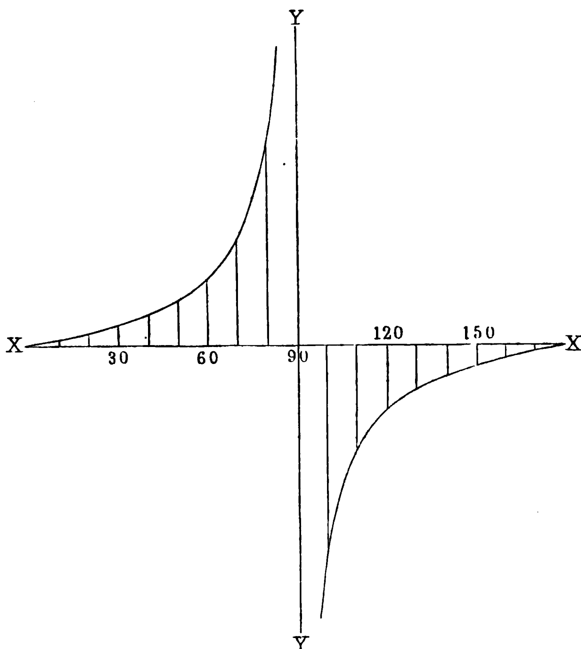
$$y = cos. \, x$$

und Fig. 53 die Gleichung

$$y = tang. x.$$

Bei Construction der letztern Figur, welche sich nur auf die beiden

Fig. 53.



ersten Quadranten des Winkels x erstreckt, ist jedoch der Maaßstab der Abscissen doppelt so groß, der der Ordinaten nur halb so groß genommen als für die beiden vorhergehenden Figuren.

Etwas complicirter als die oben betrachteten ist die Gleichung der **Kettenlinie**, d. h. derjenigen krummen Linie, welche durch eine möglichst biegsame Kette (oder durch ein Seil) gebildet wird, welche an zwei Punkten so aufgehängt ist, daß sie frei zwischen denselben herabhängt. Die Gleichung dieser Curve ist:

$$x = \frac{A . cos. c}{h} log. \frac{A - hy \pm \sqrt{(A - hy)^2 - A^2 (cos. c)^2}}{A(1 - sin. c)} \quad . \quad (1)$$

Die Ableitung derselben ist eine Aufgabe der Mechanik; hier wollen wir uns auf die Discussion derselben beschränken. A, h und c sind Constanten, deren Bedeutung hier nicht weiter erörtert werden kann. Wir wollen diese Gleichung auf ein rechtwinkeliges Axensystem beziehen, für

welches die positiven Werthe von y von der Axe der x nach unten gezählt werden.

Im Allgemeinen giebt obige Gleichung der Kettenlinie für jeden speciellen Werth von y zwei Werthe von x, welche in einen einzigen zusammen fallen, wenn

$$A - hy = A \cos. c,$$

also wenn

$$y = \frac{A(1 - \cos. c)}{h};$$

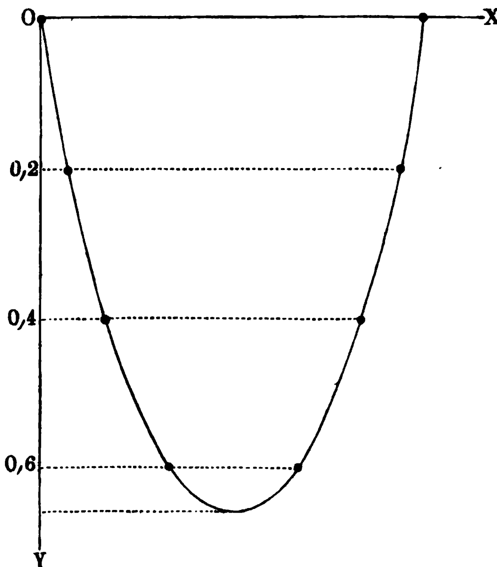
denn für diesen Werth von y wird der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck gleich 0. Für noch größere Werthe von y erhält man imaginäre Werthe von x, weil alsdann der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck negativ wird.

Setzen wir $A = 1$, $h = 1$ und $c = 70^0$, so geht Gleichung (1) über in

$$x = 0{,}342 \ldots \log. \frac{1 - y \pm \sqrt{(1 - y)^2 - 0{,}117 \ldots}}{0{,}06 \ldots} \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von y und x:

Fig. 54.



y	x
0	0 oder 0,517
0,2	0,033 » 0,483
0,4	0,085 » 0,431
0,6	0,173 » 0,343
0,658	0,2585

Nach diesen Zahlenwerthen ist die Kettenlinie, Fig. 54, construirt, indem das Decimeter zur Längeneinheit gewählt wurde.

Zweites Buch.

Analytische Geometrie im Raume.

Erstes Kapitel.

Punkte, Linien und Oberflächen im Raum.

Coordinatenaxen im Raum. So wie die Lage eines Punktes 31
in der Ebene durch Beziehung desselben auf zwei einander schneidende Coordinatenaxen bestimmt ist, so kann man die Lage eines Punktes im Raum durch Beziehung auf drei Coordinatenaxen bestimmen, von denen jede auf der Ebene der beiden anderen rechtwinkelig steht. (Von der Betrachtung schiefwinkeliger Coordinaten im Raum nehmen wir Umgang.)

Ein solches Coordinatensystem kann man auf dem Papier nicht unmittelbar darstellen, d. h. man kann die drei Axen auf dem Papier nicht in ihrer wahren gegenseitigen Lage auftragen, weil sie nicht in einer Ebene liegen, indem ja jede Axe aus der Ebene der beiden anderen heraustritt. Man muß deshalb, um durch Zeichnung eine Anschauung von einem solchen Coordinatensystem zu geben, zu perspectivischer Darstellung seine Zuflucht nehmen, indem wenigstens eine der drei Axen verkürzt gezeichnet wird.

Fig. 55.

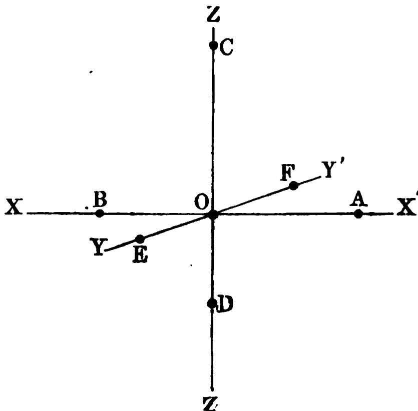
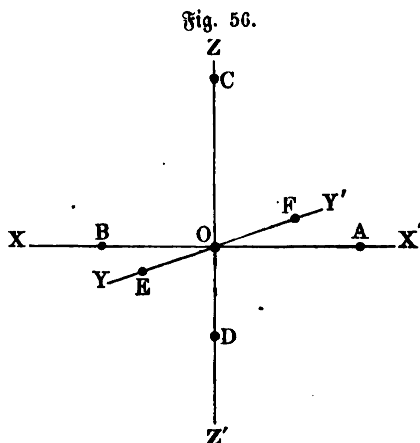


Fig. 55 stellt das perspectivische Bild eines aus drei zu einander rechtwinkeligen geraden Linien gebildeten Axensystems dar. Zwei der Axen, nämlich XX' und ZZ', sollen in der Ebene des Papiers liegen und wir wollen annehmen, daß

die Axe der x stets horizontal, die Axe der z stets vertical gestellt ist; die dritte Axe aber, nämlich die Axe der y, soll rechtwinkelig stehen zur Ebene des Papiers, also rechtwinkelig sowohl auf der Axe der x als auf der Axe der z; sie kann also in einer Zeichnung nicht in ihrer wahren Lage aufgetragen, sondern sie muß schräg liegend gezeichnet werden, wie dies in unserer Figur geschehen ist, welche das Axensystem so darstellt, als ob es sich links vom Auge des Beschauers und etwas unter demselben befände.

In allen folgenden Figuren sind die Dimensionen in der Richtung der Axe der x und der Axe der z in ihrer wahren Größe, die Dimensionen in der Axe der y aber verkürzt und zwar in $1/3$ der wahren Länge aufgetragen. So liegt z. B. der Punkt A, Fig. 56, 2cm rechts, B 1,5cm links von O. Der Punkt C liegt 2,2cm über, D 1,2cm unter O. — E stellt dagegen einen Punkt dar, welcher 2cm vor und F einen solchen, welcher 2,3cm hinter O liegt.

Fig. 56.



Die positiven Werthe von x sollen stets von O nach der Rechten, die positiven Werthe von z von O nach oben, die positiven Werthe von y endlich von O nach vorn gezählt werden.

32 **Die Coordinatenebenen.** Durch je zwei der eben besprochenen Coordinatenaxen kann man sich eine Ebene gelegt denken, welche nach den beiden Axen genannt wird, welche sie enthält. Von der gegenseitigen Lage dieser Ebenen soll Fig. 57 ein Bild geben.

Die Ebene der xz ist eine verticale Ebene, welche in unserer Figur unverkürzt erscheint und auf welcher die Axe der y rechtwinkelig steht.

Die Ebene der yz ist gleichfalls eine verticale Ebene, welche, von vorn nach hinten gerichtet, in unserer Figur verkürzt erscheint und auf welcher die Axe der x rechtwinkelig steht.

Die Ebene der xy ist eine horizontale Ebene, weil sie durch die beiden horizontalen Axen x und y gelegt ist; auf ihr steht die Axe der z rechtwinkelig. In unserer Figur erscheint die Ebene der xy verkürzt.

Je zwei dieser Coordinatenebenen schneiden sich in einer Axe; nämlich:
die Ebene der xz und die Ebene der yz in der Axe der z
» » » xz » » » » xy » » » » x
» » » yz » » » » xy » » » » y.

Durch die drei eben besprochenen Ebenen werden um den Anfangspunkt der Coordinaten herum acht körperliche Ecken gebildet, wie dies unsere Figur anschaulich machen soll. Als das erste dieser körperlichen Ecken wollen wir dasjenige bezeichnen, dessen Kanten durch die drei positiven Arme der Coordinatenaxen gebildet werden. Es ist dies also das körperliche Eck oben, vorn und rechts, das einzige, welches in Fig. 57 vollständig sichtbar ist, d. h. von welchem kein Theil durch eine der Coordinatenebenen verdeckt erscheint.

Fig. 57.

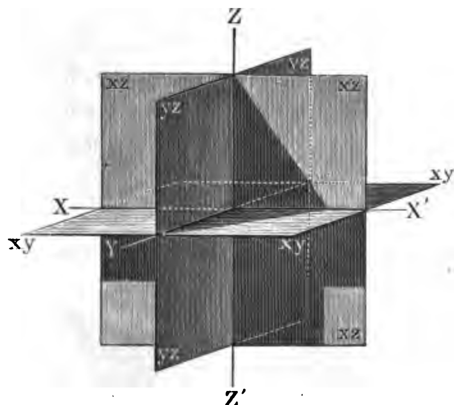
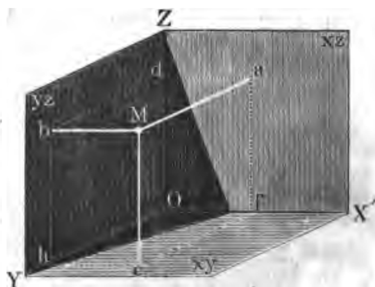


Fig. 58.



Bestimmung des Punktes. Denken wir uns von dem Punkte 33
M, Fig. 58, ein Perpendikel auf die Ebene der xz, eines auf die Ebene der yz und eines endlich auf die Ebene der xy gefällt, so sind die Punkte a, b und c, in welchen die Perpendikel die Coordinatenebenen treffen, die Projectionen des Punktes M auf die Coordinatenebenen, und zwar ist:

a die Projection des Punktes M auf die Ebene der xz
b » » » » M » » » » yz
c » » » » M » » » » xy.

Das Perpendikel Ma ist parallel mit der Axe der y, Mb ist parallel mit der Axe der x und Mc endlich ist parallel mit der Axe der z.

Die Länge jedes dieser Perpendikel, welches mit dem Buchstaben

derjenigen Axe bezeichnet wird, mit welcher es parallel läuft, mißt den Abstand des Punktes von einer der Coordinatenebenen.

$Ma = y$ ist die Entfernung des Punktes M von der Ebene der xz
$Mb = x$ » » » » » M » » » » yz
$Mc = z$ » » » » » M » » » » xy.

Wird eine Ebene gelegt durch die Linien Ma und Mc, Fig. 59, so schneidet sie die Axe der x in f.

Eine durch Mb und Mc gelegte Ebene schneidet die Axe der y in h.

Eine durch Ma und Mb gelegte Ebene schneidet die Axe der z in d.

Es ist leicht zu beweisen, daß

$$Of = bM = x$$
$$Oh = aM = y$$
$$Od = cM = z.$$

Die Lage des Punktes M ist bestimmt, sobald die Werthe seiner Coordinaten x, y und z bestimmt sind. Für den Punkt M, Fig. 59, ist z. B. $x = 12^{mm}$, $y = 34^{mm}$ und $z = 18^{mm}$. (In Betreff der Ordinaten y erinnern wir, daß dieselben in unseren Figuren mit der Hälfte ihres wahren Werthes aufgetragen sind. Dieses Verkürzungsverhältniß ist jedoch ein beliebig gewähltes.)

Fig. 59.

Fig. 60.

Um recht anschaulich zu machen, wie die Lage eines Punktes durch seine Coordinaten bestimmt ist, wollen wir einen Punkt M, Fig. 60, betrachten, für welchen ist:

$$x = 12^{mm}$$
$$y = 22^{mm}$$
$$z = 18^{mm}.$$

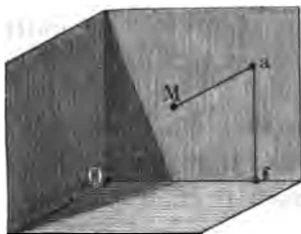
Durch die Bedingung, daß $x = 12^{mm}$ sein soll, ist ausgesprochen, daß der Punkt M in einer Ebene fn, Fig. 60, liegen müsse, welche parallel mit der Ebene der yz ist und 12^{mm} weit von ihr absteht.

Da $z = 18^{mm}$ sein soll, so liegt der Punkt M aber auch auf einer Ebene dp, welche parallel mit der Ebene der xy 18^{mm} über derselben liegt; der gesuchte Punkt M kann also nur auf der Durchschnittslinie at der beiden Ebenen fn und dp liegen.

Durch die Bedingung endlich, daß $y = 22^{mm}$ sein soll, ist aber auch noch die Lage des Punktes M auf der Linie at bestimmt, denn es soll $Ma = 22^{mm}$ sein.

Um einen Punkt M nach gegebenen Werthen von x, y und z in ein gezeichnetes Coordinatensystem aufzutragen, ist es nicht nöthig, die Ebene fn und dp, auf deren Durchschnittslinie er liegen soll, in der Weise zu zeichnen, wie es in Fig. 60 nur deshalb geschehen ist, um den Zusammenhang anschaulicher zu machen. Es genügt folgendes Verfahren: Man mache Of gleich dem gegebenen Werthe von x, errichte in f ein Perpendikel; schneide auf demselben fa gleich dem gegebenen Werthe von z ab und ziehe dann durch a eine Linie parallel mit der Axe der y, und trage auf ihr endlich aM gleich dem gegebenen Werthe von y (in der beliebig gewählten Verkürzung) auf. In dieser Weise ist in Fig. 61 der Punkt M aufgetragen, dessen Coordinaten sind $x = 20^{mm}$, $z = 15^{mm}$ und $y = 24^{mm}$ (das Verkürzungsverhältniß für y zu $\frac{1}{2}$ genommen).

Fig. 61.



Zur Uebung zeichne man ein Axensystem ähnlich dem in Fig. 59, nur etwas größer, und trage in demselben auf: 1) einen Punkt N, für welchen

$$x = 30^{mm},\ y = 40^{mm},\ z = 14^{mm},$$

und 2) einen Punkt T, für welchen ist

$$x = 16^{mm},\ y = 36^{mm} \text{ und } z = 25^{mm}.$$

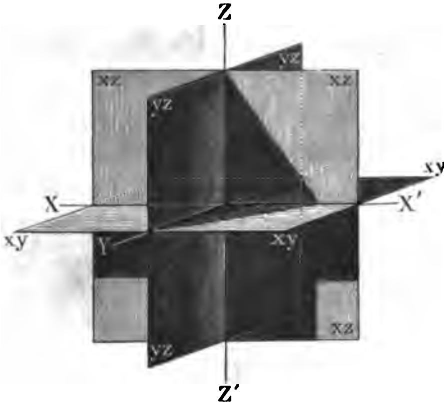
Diese Zeichnungsübungen sollen vorzugsweise dazu dienen, den Leser daran zu gewöhnen, in einer auf die Ebene des Papiers gezeichneten Figur räumliche Verhältnisse zu erkennen, was dem Anfänger oft große Schwierigkeiten macht, weshalb wir denn auch diesen Gegenstand etwas ausführlicher besprechen, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

Um die Anschauung möglichst zu erleichtern kann man auch zu einem Modell des körperlichen Ecks seine Zuflucht nehmen. Das Netz zu einem solchen Modell ist diesem Werkchen beigegeben. Bei der Zusam-

mensetzung dieses Modells ist darauf zu sehen, daß die bedruckte Seite des Papiers die innere Seite des körperlichen Ecks bilde.

Wir haben bisher nur positive Werthe von x, y und z betrachtet, es wird aber für den Leser jetzt keine Schwierigkeit mehr haben, die Bedeutung negativer Werthe von x, y oder z zu übersehen. Ein Punkt, für welchen x negativ ist, liegt links von der Ebene der yz, Fig. 62. — Ein Punkt, für welchen y negativ ist, liegt hinter der Ebene der xz, und ein Punkt endlich, für welchen z negativ ist, liegt unter der Ebene der xy.

Fig. 62.



34 **Länge und Richtung des Leitstrahles.** Der Punkt M, Fig. 63, bildet ein Eck des Langwürfels $MbhcOfad$, dessen dem Punkte M gegenüberstehendes Eck durch den Anfangspunkt O der Coordinaten gebildet wird.

Fig. 63.

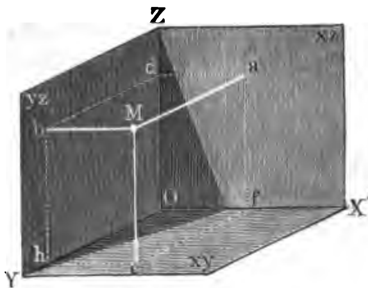
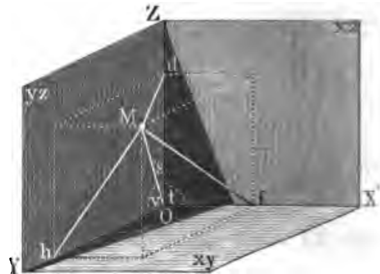


Fig. 64.



Vier Kanten dieses Langwürfels, Ma, cf, hO und bd, sind gleich y; vier andere Kanten desselben, Mb, ad, fO und ch, sind gleich x und die vier letzten endlich, Mc, af, dO und bh, sind gleich z.

Wird M mit O durch eine gerade Linie verbunden, Fig. 64, so bildet dieser Leitstrahl MO die Diagonale des eben besprochenen Langwürfels, dessen Länge wir mit R bezeichnen wollen.

Da nun x, y und z die Kantenlängen des Langwürfels sind, so ist nach §. 57 (Gleichung (2) S. 95) der Stereometrie

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

oder

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Wie weit sind die Punkte M, N und T vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt, wenn ihre Coordinaten sind

für M	$x = 24^{mm}$	$y = 12^{mm}$	$z = 15^{mm}$
» N	$x = 30$	$y = 40$	$z = 14$
» T	$x = 16$	$y = 36$	$z = 25$.

Der Leitstrahl MO, Fig. 64, welcher in unserer Figur natürlich verkürzt erscheint, macht mit der Axe der y einen Winkel, welcher in unserer Figur mit v bezeichnet ist. Den Winkel MOZ, welchen MO mit der Axe der z macht, wollen wir mit s, und den Winkel MOX', welchen MO mit der Axe der x macht, wollen wir mit t bezeichnen.

Die Fläche $Mbhc$ steht rechtwinkelig auf der Axe der y, folglich steht auch die Diagonale Mh rechtwinkelig auf derselben; mit anderen Worten, der Winkel MhO ist ein rechter (wenn er auch in unserer Figur verkürzt erscheint) oder auch Mh ist ein von M auf die Axe der y gefälltes Perpendikel.

In gleicher Weise steht Mf rechtwinkelig auf der Axe der x und Md rechtwinkelig auf der Axe der z.

In dem bei h rechtwinkeligen Dreieck MhO ist MO die Hypotenuse, hO die dem Winkel v anliegende Kathete, folglich ist

$$cos. v = \frac{hO}{MO} = \frac{y}{R}.$$

Ebenso ist MO die Hypotenuse des bei f rechtwinkeligen Dreiecks MfO, woraus sich ergiebt

$$cos. t = \frac{Of}{OM} = \frac{x}{R};$$

in gleicher Weise ergiebt sich endlich

$$cos. s = \frac{Od}{OM} = \frac{z}{R}.$$

Setzen wir für R seinen oben entwickelten Werth, so kommt

$$cos. v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$cos. t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

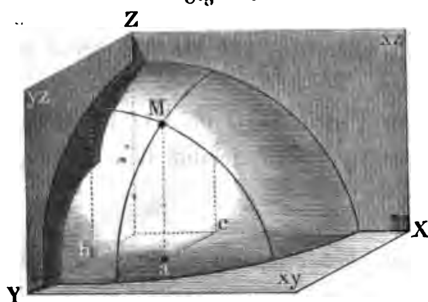
$$cos. s = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Wie groß sind die Winkel, welche die Leitstrahlen der Punkte M, N und T, deren Coordinaten oben angegeben wurden, mit den Coordinatenaxen machen?

35 **Die Gleichung der Fläche.** Wir haben in §. 3 gesehen, daß jede Gleichung zwischen zwei Variabeln x und y, auf zwei Coordinatenaxen in der Ebene bezogen, eine Curve darstellt. Dem entsprechend stellt nun auch jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und z, auf drei Coordinatenaxen im Raum bezogen, eine Fläche dar, wie dies die folgende Betrachtung darthun soll.

Fig. 65 zeigt ein Stück irgend einer krummen Fläche in seiner Lage zu den drei Coordinatenebenen. Denken wir uns nun ganz beliebig eine Anzahl von Punkten in der Ebene der xy bezeichnet, von denen etwa a einer sein mag, und durch jeden dieser Punkte eine Linie parallel mit der Axe der z gezogen, so wird jedes dieser Perpendikel die krumme Fläche in einem Punkte treffen, wie denn das in a errichtete Perpendikel die Fläche in dem Punkte M trifft.

Fig. 65.



Für jedes dieser Perpendikel hat nun die von der Ebene der xy an gemessene Höhe z seines in der krummen Fläche liegenden Gipfelpunktes einen ganz bestimmten Werth, welcher von einem dieser Perpendikel zum andern variirt, so also, daß die Höhe $aM = z$ eines Punktes M der krummen Fläche über der Ebene der xy als Function der Lage erscheint, welche seine Projection a in der Ebene der xy einnimmt.

Die Lage des Punktes a in der Ebene der xy ist aber durch seine Coordinaten $ab = x$ und $ac = y$ bedingt, welche zugleich die Abstände des Punktes M von der Ebene der yz und von der Ebene der xz sind; wir können also sagen: wenn der Punkt M auf einer gegebenen Oberfläche liegen soll, so ist seine Ordinate z eine Function seiner beiden anderen Coordinaten x und y, oder in Zeichen, es ist

$$z = f(x, y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wo die Form der Function von der Natur und Lage der krummen

Fläche abhängt. Aus der Gleichung (1) kann man aber auch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ableiten, welche die allgemeinste Form einer Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und z ist.

Die Form der Function hängt, wie schon bemerkt, von der Natur und der Lage der Fläche ab. Zunächst unterscheidet man **algebraische Flächen**, welche durch algebraische Functionen dargestellt werden, und **transscendente Flächen**, in deren Gleichung transscendente Functionen eintreten.

Die algebraischen Flächen werden wieder in Flächen ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grades eingetheilt, je nachdem in ihren Gleichungen die Variabeln nur in der ersten oder auch in der zweiten, dritten u. s. w. Potenz vorkommen. Wir können uns hier nur mit einigen algebraischen Flächen beschäftigen.

Die Gleichung der Ebene. Es ist schon auf Seite 3 der Ele- 36
mentargeometrie bemerkt worden, daß durch Bewegung einer Linie eine Fläche entsteht, und in der That kann man regelmäßige Flächen am besten dadurch charakterisiren, daß man angiebt, wie sie durch Bewegung einer gegebenen Curve entstanden sind.

Eine **Ebene** nun kann man sich dadurch entstanden denken, daß eine gerade Linie, die **Erzeugungslinie** (generatrix), in der Weise fortgeschoben wird, daß sie dabei stets ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt und während dieser Bewegung stets an einer zweiten gegebenen Geraden, der **Leitlinie** (directrix), hingleitet. Aus dieser Entstehungsweise der Ebene läßt sich nun auch leicht die Gleichung derselben ableiten.

Fig. 66.

Die Ebene $npsr$, Fig. 66, kann man sich dadurch entstanden denken, daß die gerade Linie np (generatrix) mit sich selbst parallel an der Linie nr (directrix) hin fortgeschoben wird.

Die Gleichung der Linie np, als einer in der Ebene der xz liegenden Geraden, ist

$$z = ax + d,$$

wo a die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Gerade np mit der Axe der x macht, d aber den Abstand On.

Als Directrix haben wir die in der Ebene der yz liegende Gerade nr angenommen, deren Gleichung ist

$$z = by + d,$$

wo b die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Gerade nr mit der Axe der y macht.

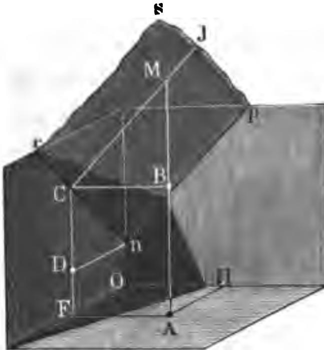
Es sei nun die Erzeugungslinie parallel mit sich selbst bis in die Lage CJ verschoben und auf ihr der Punkt M bezeichnet. Die Coordinaten dieses Punktes M sind nun $MA = z$, $FA = x$ und $AH = y$. Es kommt nun darauf an, zu ermitteln, in welcher Weise die Ordinate z abhängig ist von x und y.

Denken wir uns zunächst von C ein Perpendikel CB auf MA gefällt, so theilt dieses die Ordinate des Punktes M in zwei Theile; es ist nämlich

$$z = MA = MB + BA \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Nun ist aber CB parallel mit der Axe der x, und da ferner CJ parallel ist mit np, so ist auch a die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen CJ mit CB macht, es ist also

Fig. 67.



$$MB = a \, . \, CB.$$

Nun ist aber $CB = FA = x$, folglich auch

$$MB = a \, . \, x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Es ist aber ferner $BA = CF$; und da C ein Punkt der Directrix nr ist, dessen Abscisse OF (gleich AH) wir mit y bezeichnen wollen, so ist offenbar

$$BA = CF = by + d \; . \quad (3)$$

Substituirt man nun in Gleichung (1) für MB und BA ihre Werthe bei (2) und (3), so kommt

$$z = ax + by + d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

welches die gesuchte Gleichung der Ebene ist.

Jede Gleichung des ersten Grades zwischen den drei Veränderlichen x, y und z läßt sich nun auf die Form der Gleichung (4) zurückführen, jede Gleichung von der Form

$$gx + hy + kz + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

in welcher g, h, k und l beliebige constante Factoren bezeichnen, ist also die Gleichung einer Ebene.

Besondere Fälle. Setzen wir in Gleichung (5) $g = 0$, $h = 0$ und $l = 0$, so reducirt sie sich auf 37

$$z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und dies ist die Gleichung der Ebene der xy, denn sie repräsentirt die Gesammtheit aller Punkte, für welche $z = 0$ ist.

Wird in Gleichung (5) $h = 0$, $k = 0$ und $l = 0$ gesetzt, so geht sie über in

$$x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welches die Gleichung für die Ebene der yz ist.

In gleicher Weise ergiebt sich

$$y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als Gleichung der Ebene der xz.

Wird in Gleichung (5) nur $g = 0$ und $h = 0$ gesetzt, so kommt

$$kz + l = 0$$

und daraus

$$z = -\frac{l}{k}$$

oder

$$z = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wenn wir m für den Quotienten $-\frac{l}{k}$ setzen. Es ist dies die Gleichung einer Ebene, welche parallel mit der Ebene der xy in einem Abstande m über oder unter derselben liegt, je nachdem das Vorzeichen von m positiv oder negativ ist. In gleicher Weise ist

$$x = r$$

die Gleichung einer Ebene, welche parallel läuft mit der Ebene der yz und um die Länge r von ihr absteht, und endlich ist

$$y = t$$

die Gleichung einer in der Entfernung t parallel mit der Ebene der xz herlaufenden Ebene.

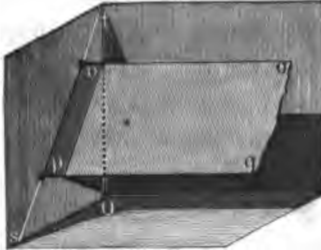
Setzen wir in Gleichung (5) $g = 0$, so kommt

$$hy + kz + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Nach dieser Gleichung hängt der Werth von z lediglich von der Variabeln y ab, so daß es ganz und gar gleichgültig ist, wie groß man x, welches gar nicht in der Gleichung (10) vorkommt, nehmen mag. Diese

vollkommene Gleichgültigkeit von x kann aber nur für eine Ebene statt haben, welche mit der Axe der x parallel läuft, die Gleichung (10) stellt also eine Ebene dar, welche auf der Ebene der yz rechtwinkelig steht, wie dies für die in Fig. 68 dargestellte Ebene $nopq$ der Fall ist.

Fig. 68.



Dividirt man Gleichung (10) mit k, so ergiebt sich aus ihr

$$z = -\frac{h}{k}y - \frac{l}{k}$$

oder

$$z = \alpha y + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wenn man α für $-\frac{h}{k}$ und β für $-\frac{l}{k}$ setzt. Auf die Ebene der zy allein bezogen ist dies die Gleichung einer geraden Linie sf, welche, in der Ebene der yz liegend, mit der Axe der y einen Winkel fsO macht, dessen trigonometrische Tangente α ist, und welche die Axe der z in einem Punkte f schneidet, dessen Abstand fO vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich β ist.

Auf die Coordinaten des Raumes bezogen repräsentirt die Gleichung (11) oder die ihr äquivalente Gleichung (10) eine Ebene, welche durch die Linie sf gelegt ist und mit der Axe der x parallel läuft, oder was dasselbe ist, auf der Ebene der yz rechtwinkelig steht.

So wie np nun ein willkürlich begränztes Stück der Linie sf ist, so ist auch $nopq$ nur ein willkürlich begränztes Stück der durch Gleichung (10) dargestellten Ebene.

Setzen wir in Gleichung (5) $h = 0$, so kommt

$$gx + kz + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Fig. 69.

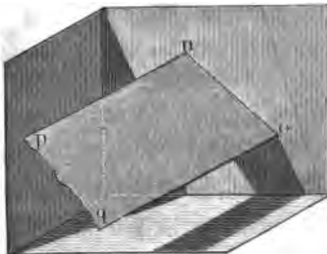
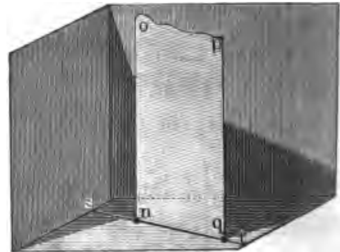


Fig. 70.



die Gleichung einer Ebene, welche, wie *nopq*, Fig. 69, mit der Axe der y parallel läuft.

Ebenso stellt endlich die Gleichung

$$gx + hy + l = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

welche man erhält, wenn man in Gleichung (5) $k = 0$ setzt, eine Ebene dar, welche, wie *nopq*, Fig. 70, auf der Ebene der xy rechtwinkelig steht, also mit der Axe der z parallel läuft.

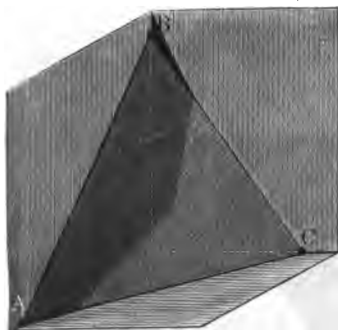
Durchschnitte einer Ebene mit den drei Coordinatenaxen. 38
Jede Ebene, welche nicht parallel läuft mit einer der drei Coordinatenaxen, muß alle drei Axen schneiden, und man findet den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe der z, wenn man in der Gleichung der Ebene (Gleichung (5) $x = 0$ und $y = 0$ setzt. Es ergiebt sich alsdann

$$z = -\frac{l}{k}.$$

Um den Punkt zu finden, in welchem eine Ebene die Axe der y schneidet, hat man in der Gleichung dieser Ebene x und z gleich Null zu setzen; auf diese Weise findet man

$$y = -\frac{l}{h}.$$

Fig. 71.



Für den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe der x findet man endlich

$$x = \frac{l}{g},$$

wenn man in Gleichung (5) $y = 0$ und $z = 0$ setzt.

Es sei z. B. die Gleichung einer Ebene

$$1{,}8x + 0{,}9y + 1{,}2z - 3{,}6 = 0 \quad (14)$$

Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit den Axen der y, der z und der x durch A, B und C, so ergiebt sich

für den Punkt A . . . . $y = +4$
» » » B . . . . $z = +3$
» » » C . . . . $x = +2$.

In Fig. 71 ist das zwischen die positiven Arme der Coordinatenaxen fallende Stück dieser Ebene dargestellt, indem man das Centimeter zur Längeneinheit gewählt hat.

Die Gleichung der geraden Linie BC, in welcher die Ebene Gleichung (14) die Ebene der xz schneidet, ergiebt sich aus Gleichung (14), wenn man in Gleichung (14) $y = 0$ setzt; man findet auf diese Weise

$$1{,}8\,x + 1{,}2\,z - 3{,}6 = 0.$$

Setzt man in Gleichung (14) $x = 0$, so findet man

$$0{,}9\,y + 1{,}2\,z - 3{,}6 = 0$$

als Gleichung der Linie AB, in welcher unsere Ebene von der Ebene der yz geschnitten wird.

Setzt man endlich in Gleichung (14) $z = 0$, so erhält man als Gleichung der Linie AC:

$$1{,}8\,x + 0{,}9\,y - 3{,}6 = 0.$$

Es sei die Gleichung einer Ebene

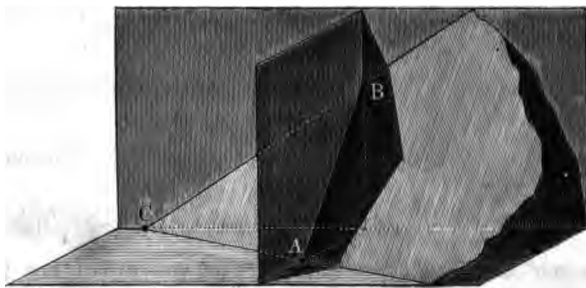
$$-1{,}2\,x + 2\,y + 1{,}8\,z - 3{,}6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Bezeichnen wir wiederum mit A den Durchschnittspunkt der Ebene (15) mit der Axe der y; mit B den Durchschnittspunkt derselben mit der Axe der z und mit C endlich ihren Durchschnittspunkt mit der Axe der x, so ergiebt sich

für A . . . . $y = +1{,}8$
» B . . . . $z = +2$
» C . . . . $x = -3$;

die Ebene hat also die Fig. 72 dargestellte Lage.

Fig. 72.



In gleicher Weise stellt Fig. 73 ein Stück der Ebene dar, deren Gleichung ist

$$-1{,}8\,x - 2\,y + 1{,}2\,z + 3{,}6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Uebungsaufgaben. Die Gleichungen zweier Ebenen seien

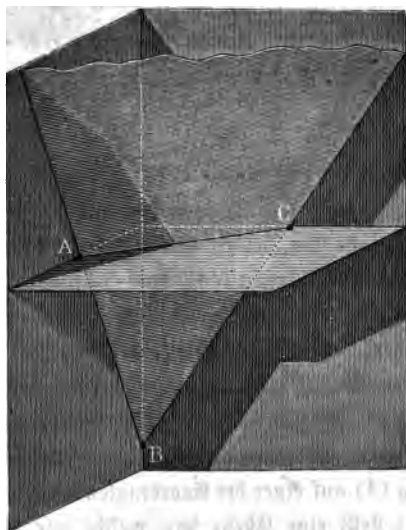
$$1{,}8\,x + 0{,}9\,y - 1{,}2\,z - 3{,}6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und

$$-1{,}8\,x + 0{,}9\,y + 1{,}2\,z + 3{,}6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

In welchen Punkten schneidet jede dieser Ebenen die Coordinatenaxen. Welches sind die Gleichungen der geraden Linien, in welchen jede dieser

Fig. 73.



Ebenen die drei Coordinatenebenen schneidet? — Wenn diese Fragen beantwortet sind, stelle man jede dieser Ebenen durch Zeichnung nach der Methode dar, wie es in Fig. 71, 72 und 73 für die Gleichungen (14), (15) und (16) geschehen ist.

Die Gleichungen der geraden Linie. Zwei ebene Flächen, 39
deren Gleichungen sein mögen

$$a x + b y + c z + d = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und

$$a' x + b' y + c' z + d' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

schneiden sich stets in einer geraden Linie, wenn nicht etwa die beiden Ebenen (1) und (2) einander parallel sind, was nur der Fall ist, wenn $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ und $d = d'$.

Die Combination zweier Gleichungen der Art, wie die Gleichungen (1) und (2), stellt also stets eine gerade Linie im Raume dar.

Um die Lage der Durchschnittslinien zweier gegebenen Ebenen leichter übersehen zu können, leitet man aus den gegebenen Gleichungen zwei andere ab, deren jede nur zwei Variabeln enthält. Multiplicirt man

Gleichung (1) mit a', Gleichung (2) aber mit a, so gelangt man durch Subtraction zu der Gleichung

$$(a'b - ab')\,y + (a'c - ac')\,z + a'd - ad' = 0,$$

die wir einfach

$$\beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

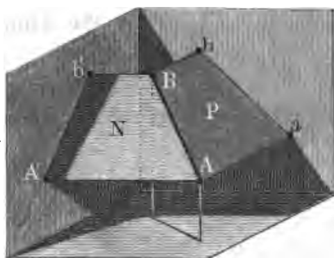
schreiben wollen. Multiplicirt man dagegen die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, so gelangt man auf demselben Wege zu einer Gleichung von der Form

$$\alpha' x + \gamma' z + \delta' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da die Gleichungen (3) und (4) aus den Gleichungen (1) und (2) abgeleitet sind, so müssen auch dieselben zusammengehörigen Werthe von x, y und z, welche den beiden Gleichungen (1) und (2) genügen, zugleich den beiden Gleichungen (3) und (4) Genüge leisten, oder mit anderen Worten: die Ebenen Gleichung (3) und Gleichung (4) schneiden sich in denselben Geraden, in welchen sich die Ebenen Gleichung (1) und Gleichung (2) schneiden. Die Lage der Ebenen (3) und (4) ist aber leichter zu übersehen, weil ihre Gleichungen nur zwei Variabeln enthalten, weil also sowohl die Ebene Gleichung (3) als auch die Ebene Gleichung (4) auf einer der Coordinatenebenen rechtwinkelig steht.

Gleichung (3) stellt eine Ebene dar, welche wie die mit N bezeichnete Ebene der Fig. 74 auf der Ebene der yz rechtwinkelig steht, während die Gleichung (4) einer auf der Ebene der xz rechtwinkelig stehenden Ebene, etwa der Ebene P, Fig. 74, angehört. AB ist die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, welche in unserer Figur nur deshalb begränzt erscheint, weil auch von den sich in AB schneidenden Ebenen nur ein willkürlich begränztes Stück in unserer Figur gezeichnet ist.

Fig. 74.



Auf die Ebene der xz bezogen stellt Gleichung (4) die Projection der Linie AB auf die Ebene der xz dar, wie denn auch die Projection der Linie AB auf die Ebene der yz durch die Gleichung (3) dargestellt wird.

Wenn also die Gleichungen zweier Ebenen gegeben sind, so kann man aus denselben nach dem obigen Verfahren die Projectionen ihrer Durchschnittslinie auf die Ebene der xz und der yz ermitteln.

In gleicher Weise hätte man auch die Projection der Durchschnittslinie auf der Ebene der xy finden können.

Um das eben Besprochene zu erläutern, wollen wir die Projectionen der Linie suchen, in welcher sich die schon im vorigen Paragraphen besprochenen Ebenen

$$1{,}8x + 0{,}9y + 1{,}2z - 3{,}6 = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (5)$$

und

$$-1{,}2x + 2y + 1{,}8z - 3{,}6 = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (6)$$

schneiden. Eliminirt man x aus diesen beiden Gleichungen, so kommt

$$4{,}68y + 4{,}68z - 10{,}8 = 0$$

oder

$$z = -y + 2{,}3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7)$$

als Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene der yz.

Durch Elimination von y aus den Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich

$$z = -6{,}9x + 5{,}0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

für die Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene der xz.

Für die Projection der besprochenen Durchschnittslinie auf die Ebene der xy ergiebt sich endlich durch Elimination von z aus den Gleichungen (5) und (6)

$$y = 6x - 2{,}7 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

Zur Uebung zeichne man in ein Axenschema wie das der Fig. 72 nicht allein die Ebene Gleichung (6) ein, sondern auch die Ebene Gleichung (5), ziehe dann die Durchschnittslinie der beiden Ebenen und bestimme auch in der Figur die Projectionen der Durchschnittslinie auf die drei Coordinatenebenen.

In gleicher Weise berechne und zeichne man die Projectionen der geraden Linie, in welcher sich die durch Gleichung (14) und (17) in Seite 82 dargestellten Ebenen schneiden. Ferner bestimme man die Durchschnittslinie der Ebenen Gleichung (16) und Gleichung (17) u. s. w.

Die Gleichungen des Punktes. Je zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie, jede gerade Linie schneidet aber eine Ebene in einem Punkte, wenn nicht die gerade Linie mit der Ebene parallel läuft. Wenn man also die beiden Gleichungen einer geraden Linie mit der Gleichung einer Ebene combinirt, so wird man durch die Combination dieser drei Gleichungen die Coordinaten des Durchschnittspunktes erhalten. 40

Es seien z. B.

$$ax + by + cz + d = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

die beiden Gleichungen einer geraden Linie und

$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Gleichung einer Ebene.

Die Combination dieser drei Gleichungen liefert für jede der drei Unbekannten x, y und z einen speciellen Werth, und diese Werthe von x, y und z, welche gleichzeitig den Gleichungen (1), (2) und (3) genügen, sind die Coordinaten des Punktes, in welchem die Ebene Gleichung (3) von der Linie Gleichung (1) und (2) getroffen wird, oder mit anderen Worten die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die drei Ebenen schneiden, welche durch die Gleichungen (1), (2) und (3) dargestellt sind.

Die Combination dreier Gleichungen ersten Grades zwischen den drei Veränderlichen x, y und z stellt also stets einen Punkt im Raume dar.

Combinirt man z. B. die Gleichungen (14), (15) und (16) in Seite 82, so findet man als Coordinaten des Punktes, in welchem sich die drei durch jene Gleichungen dargestellten Ebenen schneiden,

$$x = 0{,}74$$
$$y = 1{,}57$$
$$z = 0{,}73.$$

Zur Uebung berechne man die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die durch die Gleichungen (14), (15) und (17), Seite 82, dargestellten Ebenen schneiden. Ebenso den Durchschnittspunkt der Ebenen Gleichung (14), (16) und (18) u. s. w.

41 **Durchschnittspunkte gerader Linien.** Während zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien sich jedenfalls in einem Punkte oder zwei ebene Flächen sich jedenfalls in einer geraden Linie schneiden (den Fall des Parallelismus ausgenommen), können zwei gerade Linien im Raum neben einander herlaufen, ohne sich zu schneiden.

Es seien

$$\begin{cases} x = \mathfrak{a}z + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ y = \mathfrak{b}z + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \end{cases}$$

die Gleichungen der geraden Linie AB, Fig. 75, oder mit anderen Worten: es sei (1) die Gleichung der Projection ab der Linie AB auf die Ebene der xz und (2) die Gleichung ihrer Projection auf die Ebene der yz. Es seien ferner

$$\begin{cases} x = \mathfrak{a}'z + \alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ y = \mathfrak{b}'z + \beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{cases}$$

in gleichem Sinne die Gleichungen der Linie CD. Combinirt man die Gleichungen (1) und (2) mit Gleichung (3), so erhält man die Coordinaten x', y' und z' des Punktes P, in welchem die Linie AB die Ebene

Fig. 75.

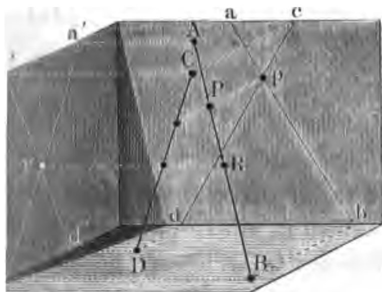
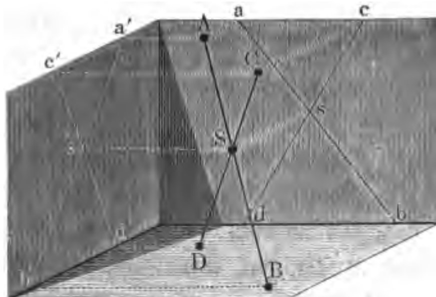


Fig. 76.



Gleichung (3) (also die Ebene $CDcd$) trifft; also zunächst für die Höhe des Punktes P über der Ebene der xy aus der Gleichsetzung der Werthe von x in Gleichung (1) und (3)

$$z' = \frac{\alpha - \alpha'}{\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Combinirt man in gleicher Weise die Gleichungen (1), (2) und (4), so erhält man die Coordinaten x'', y'' und z'' des Punktes R, in welchem die Linie AB die (natürlich über die Gränzen des Vierecks $CDc'd$, erweiterte) Ebene $CDc'd'$ trifft und zunächst für die Höhe des Punktes R über der Ebene der xy

$$z'' = \frac{\beta - \beta'}{\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Da nun die Factoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, α, α', $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, β und β' ganz unabhängig von einander sind, so werden im Allgemeinen die Werthe von z' und z'' ungleich sein, die Punkte P und R also in verschiedener Höhe über der Ebene der xy liegen. Eine Durchschneidung der beiden Linien AB und CD ist aber offenbar nur dann möglich, wenn die beiden Punkte P und R in einen einzigen zusammenfallen, wenn also $z' = z''$, woraus sich für die Durchschneidung der beiden Linien die Bedingungsgleichung

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}} = \frac{\beta - \beta'}{\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}}$$

ergiebt.

Es seien z. B. die Gleichungen einer geraden Linie

$$\left.\begin{array}{l} x = 1{,}5z - 1 \\ y = 0{,}4z - 3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Die Gleichungen einer zweiten Linie seien

$$\left.\begin{array}{l} x = 2z + 0{,}5 \\ y = -0{,}6z + 1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Die Gleichungen einer dritten Linie endlich seien

$$\left.\begin{array}{l} x = -0{,}5z + 3 \\ y = -1{,}2z + 0{,}2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Welche dieser drei Linien schneiden sich und welche schneiden sich nicht?

Wenn die Gleichungen zweier geraden Linien im Raum gegeben sind, so kann man den Winkel berechnen, welchen sie mit einander machen, und in ähnlicher Weise, wie es für die Linien in der Ebene geschehen ist, kann man eine Bedingungsgleichung entwickeln, welche erfüllt sein muß, wenn zwei gerade Linien im Raum einen rechten Winkel mit einander machen sollen. Wir wollen diese Fragen nur erwähnen, ohne auf ihre Lösung hier weiter einzugehen.

Zweites Kapitel.

Krumme Oberflächen.

---

42 **Entstehung regelmässiger Oberflächen.** Die regelmäßigen Oberflächen lassen sich am zweckmäßigsten durch die Art ihrer Entstehung, durch die Bewegung einer gegebenen Curve definiren. Man unterscheidet in dieser Beziehung hauptsächlich drei Arten von Oberflächen, nämlich:

1. Cylindrische Oberflächen, welche dadurch entstehen, daß man eine gerade Linie, die Erzeugungslinie (generatrix), parallel mit sich selbst in der Weise fortschiebt, daß sie bei dieser Bewegung stets an einer gegebenen Curve (Leitlinie, directrix) hingleitet.

2. Konische oder Kegeloberflächen werden dadurch erzeugt, daß eine gerade Linie stets durch einen und denselben festen Punkt gehend an einer gegebenen Leitlinie hergeführt wird.

3. **Rotationsflächen** sind Flächen, welche dadurch entstehen, daß eine gegebene Curve um eine feste Axe umgedreht wird.

Wir wollen nun in den folgenden Paragraphen die wichtigsten der hierher gehörigen Oberflächen betrachten.

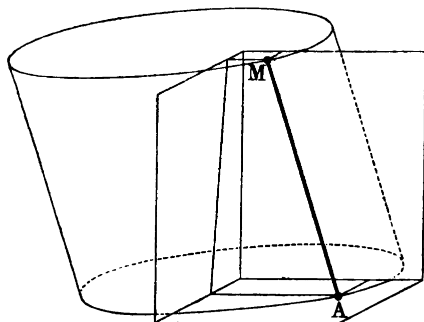
Cylindrische Flächen. Die Gleichungen der Erzeugungslinie 43
MA, Fig. 77, seien

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Da diese Linie parallel mit sich fortgeschoben wird, so bleiben a und b stets dieselben, während α und β sich stetig ändern, wenn die Linie nach und nach ihre Lage ändert.

Setzt man in den beiden Gleichungen (1) $z = 0$, so kommt $x = \alpha$ und $y = \beta$, es sind also α und β offenbar die Coordinaten des Punktes A, in welchem die Erzeugungslinie bei einer speciellen Lage die Ebene der xy trifft, eines Punktes, welcher natürlich seine Lage in der Ebene der xy ändert, wenn die Erzeugungslinie fortgeschoben wird.

Fig. 77.



Nehmen wir nun der Einfachheit wegen an, die Leitlinie sei eine in der Ebene der xy liegende Curve, so ist der Punkt A ein Punkt der Leitlinie und er soll bei dem Fortschieben der Erzeugungslinie die Directrix beschreiben. Da wir die Coordinaten dieses Punktes mit α und β bezeichnet haben, so ist

$$\beta = f(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die Gleichung der directrix.

Die cylindrische Oberfläche ist nun eine solche, welche den durch die beiden Gleichungen bei (1) und der Gleichung bei (2) ausgesprochenen Bedingungen zugleich Genüge leisten soll, wir werden also die Gleichung der cylindrischen Oberfläche dadurch erhalten, daß wir die drei Gleichungen combiniren und durch diese Combination α und β eliminiren. Aus den beiden Gleichungen bei (1) ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = x - az \\ \beta = y - bz \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (2) substituirt

$$y - bz = f(x - az) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als allgemeinste Form der Gleichung einer Cylinderfläche.

Es sei z. B. die Leitlinie ein Kreis, welcher in der Ebene der xy liegend den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkte hat, wie dies bei der Fig. 77 dargestellten Cylinderfläche wirklich der Fall ist, so würde Gleichung (2) werden

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

wenn r den Radius des Kreises bezeichnet. Setzt man in dieser Gleichung für α und β ihre Werthe bei (3), so kommt

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Gleichung einer schiefen Cylinderfläche von kreisförmiger Basis. Für den Fall, daß die Erzeugungslinie mit der Axe der z parallel läuft, wird $a = 0$ und $b = 0$, und aus Gleichung (5) wird für diesen Fall

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welches die Gleichung eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis ist, dessen Axe durch die Axe der z gebildet wird. Da z in dieser Gleichung (6) gar nicht vorkommt, so bleibt es stets willkürlich, welches auch die zusammengehörigen, der Gleichung (6) genügenden Werthe von x und y sein mögen.

Die Gleichung eines Cylinders von kreisförmiger Basis, dessen Axe durch die Axe der x gebildet wird, ist

$$z^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

während

$$z^2 + x^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

auf drei rechtwinkelige Coordinatenaxen im Raum bezogen die Gleichung eines Cylinders von kreisförmiger Basis ist, dessen Axe mit der Axe der y zusammenfällt.

Wird die Leitlinie zur geraden Linie, so geht die Cylinderfläche in eine Ebene über, oder mit anderen Worten die Ebene ist eine Cylinderfläche, deren Leitlinie eine gerade ist, und aus dieser Definition muß man auch die Gleichung der Ebene ableiten können.

Setzen wir in der That für die Gleichung (2) der Leitlinie

$$\alpha - c\beta + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo c und d constante Factoren bezeichnen; setzen wir dann in diese Gleichung (9) für α und β ihre Werthe bei (3), so kommt

$$x - az - c(y - bz) + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

eine Gleichung, welche in Beziehung auf x, y und z vom ersten Grade, also die Gleichung einer Ebene ist.

Konische Oberflächen. Konische Flächen oder Kegelflächen 44 werden durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, welche stets durch einen festen Punkt geht, dessen Coordinaten a, b und c sind, welche aber bei ihrer Drehung um diesen Punkt stets an einer gegebenen Leitlinie hergeführt wird.

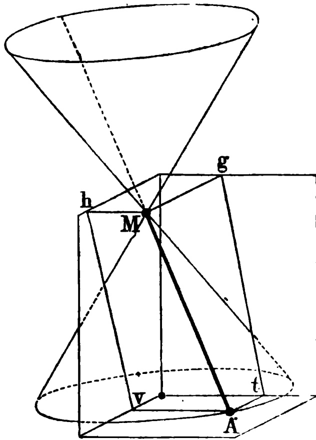
In Fig. 78 sei M der feste Punkt, durch welchen die Erzeugungslinie stets gehen soll. Die Coordinaten desselben seien

$$Mh = a$$
$$Mg = b$$

und die Höhe des Punktes M über der Ebene der $xy = c$.

Es sei ferner MA die Erzeugungslinie in einer der verschiedenen Lagen, welche sie annehmen kann, so sind gt und hv ihre Projectionen auf die Ebenen der xz und der yz und die Gleichungen dieser Projectionen

Fig. 78.



$$(x - a) = \alpha (z - c) \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$(y - b) = \beta (z - c) \quad . \quad . \quad (2)$$

Hier sind a und b unveränderliche Größen, während α und β ihre Werthe ändern, wenn die Erzeugungslinie in eine andere Lage übergeführt wird.

Bezeichnen wir mit x' und y' die Coordinaten des Punktes A, in welchem die Erzeugungslinie die Ebene der xy trifft, so finden wir die Werthe von x' und y', wenn wir in Gleichung (1) und (2) $z = 0$ setzen. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\left.\begin{array}{l} x' = a - \alpha c \\ y' = b - \beta c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nun aber soll die Erzeugungslinie so geführt werden, daß der Punkt A stets in einer Curve bleibt, für deren Gleichung wir

$$y' = f(x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

annehmen wollen. Setzen wir in diese Gleichung (4) die Werthe von x' und y' aus (3), so kommt

$$(b - \beta c) = f(a - \alpha c) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und in dieser Gleichung hat man nur die Werthe von α und β zu substituiren, welche sich aus den Gleichungen (1) und (2) ergeben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{x - a}{z - c} \\ \text{und} \qquad \beta &= \frac{y - b}{z - c} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

um die Gleichung der konischen Oberfläche zu erhalten.

Es sei z. B. die Leitlinie ein in der Ebene der xy liegender Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, so wird Gleichung (4)

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Setzen wir in diese Gleichung für x' und y' ihre Werthe bei (3), so kommt

$$(a - \alpha c)^2 + (b - \beta c)^2 = r^2.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für α und β ihre Werthe bei (6), so kommt

$$\left(a - \frac{x - a}{z - c}\, c\right)^2 + \left(b - \frac{y - b}{z - c}\, c\right)^2 = r^2$$

und nach einigen Umformungen

$$r^2 (z - c)^2 = (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$$

für die Gleichung eines schiefen Kegels von kreisförmiger Basis. Soll der Kegel ein gerader sein, so muß sein Scheitel M auf der Axe der z liegen, also $a = 0$ und $b = 0$ sein, mithin ergiebt sich

$$r^2 (z - c)^2 = (x^2 + y^2)\, c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

als Gleichung des geraden Kegels von kreisförmiger Basis, wenn c die Höhe des Scheitelpunktes über der Ebene der xy und r der Radius des in der Ebene der xy liegenden Leitkreises ist.

Läge der Leitkreis, dessen Radius gleich r, in der Ebene der yz und der Scheitel des Kegels auf der Axe der x, um die Länge c vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt, so wäre die Gleichung des Kegels

$$r^2 (x - c)^2 = (z^2 + y^2)\, c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

45 **Rotationsoberflächen.** Mit dem Namen der Rotationsoberflächen oder der Umdrehungsoberflächen bezeichnet man solche

Oberflächen, welche man sich durch Umbrehung einer beliebigen Curve, der Erzeugungslinie oder generatrix, um eine feste Axe entstanden denken kann.

Man kann sich die Rotationsflächen auch in der Weise entstanden denken, daß ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf einer festen Axe steht, parallel mit sich selbst in der Weise verschoben wird, daß dabei der Mittelpunkt des Kreises stets auf der Axe bleibt, sein Radius aber so ab- oder zunimmt, daß seine Peripherie stets eine gegebene Curve schneidet, wie dies durch Fig. 79 erläutert wird, in welcher die Axe der z zugleich die Axe bildet, welche sämmtliche Kreismittelpunkte verbindet.

Nach dieser letzteren Definition läßt sich nun auch leicht die allgemeine Form der Gleichung der Umbrehungsoberflächen ableiten. Ein jeder Punkt M einer solchen Oberfläche gehört einem Kreise an, dessen Radius $CM = CF'$ wir mit r bezeichnen wollen. Bezeichnen wir nun mit x und y die Coordinaten Ca und Cb des Punktes M, so haben wir

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Der Radius $CF' = r$ ändert sich aber mit dem Abstand $CO = z$, oder mit anderen Worten es ist r eine Function von z, d. h. in Zeichen

Fig. 79.

$$r = f(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Gleichung (2) ist aber die Gleichung der Curve $OF'F$, durch deren Umbrehung man unsere Oberfläche entstanden denken kann, wenn man mit r die Ordinate CF des Punktes F bezeichnet, welche der Abscisse $OC = z$ entspricht. Die Gleichung der Rotationsoberfläche ergiebt sich aber, wenn man in Gleichung (1) für r seinen Werth aus Gleichung (2) setzt. Es kommt alsdann

$$x^2 + y^2 = f(z)^2 \quad . \quad (3)$$

als die allgemeinste Form der Gleichung einer Rotationsoberfläche.

Nehmen wir z. B. an, die Erzeugungscurve sei ein Kreis, dessen Radius R ist, so würde Gleichung (2) die specielle Form

$$r^2 = R^2 - z^2$$

annehmen; wird aber dieser Werth von r^2 in Gleichung (1) substituirt, so kommt

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

als Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt und deren Radius gleich R ist.

Die Erzeugungscurve sei eine Parabel, deren Axe mit der Axe der z und deren Scheitel mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, so ist ihre Gleichung

$$r^2 = az,$$

folglich die Gleichung des Umdrehungsparaboloids (wie ein solches in Fig. 79 dargestellt ist)

$$x^2 + y^2 = az \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

46 **Rotationsellipsoide.** Wenn eine Ellipse entweder um ihre große oder um ihre kleine Axe umgedreht wird, so entsteht ein Umdrehungsellipsoid.

Die Gleichung einer Ellipse, deren kleine Axe mit der Axe der z zusammenfällt und für welche wir die in der Richtung der großen Axe A gemessenen Abscissen mit r bezeichnen wollen, ist

$$A^2z^2 + B^2r^2 = A^2B^2$$

und daraus

$$r^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - z^2);$$

setzt man diesen Werth von r^2 in Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, so kommt

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - z^2)$$

oder

$$B^2(x^2 + y^2) + A^2z^2 = A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Gleichung eines Rotationsellipsoids, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine, senkrecht zur Ebene der xy stehende Axe entstanden ist.

Fig. 80 stellt ein solches Rotationsellipsoid dar, dessen Umdrehungsaxe die Länge $B = 2^{cm}$ hat, während $A = 3^{cm}$ ist.

Wird eine Ellipse, deren große Axe A senkrecht steht auf der Ebene der yz, um diese große Axe umgedreht, so entsteht ein Umdrehungsellipsoid

von der in Fig. 81 dargestellten Form, als dessen Gleichung man nach der soeben erläuterten Methode

$$A^2(y^2 + z^2) + B^2x^2 = A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

findet.

Fig. 80.

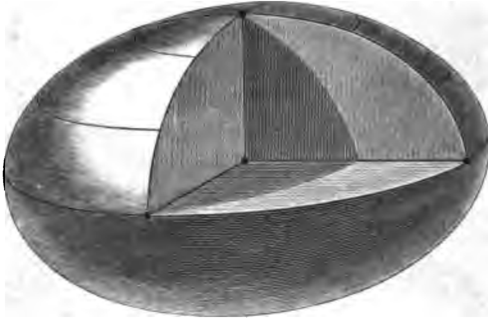
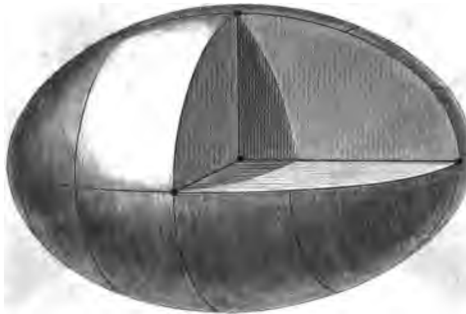


Fig. 81.



Umdrehungshyperboloide. Wird in Gleichung (5) des vorigen 47
Paragraphen das Vorzeichen von B^2 gewechselt, so kommt

$$A^2z^2 - B^2(x^2 + y^2) = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als Gleichung eines Rotationshyperboloids, welches durch Umdrehung einer Hyperbel um seine Nebenaxe entstanden ist. Fig. 82 (a. f. S.) stellt ein solches Hyperboloid dar, für welches $A = 1{,}5$ und $B = 0{,}8^{cm}$ ist.

Durch Vertauschung des Vorzeichens von B^2 in Gleichung (6) ergiebt sich

$$A^2(y^2 + z^2) - B^2x^2 = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches die Gleichung einer Oberfläche ist, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe entstanden ist. Ein solches Umdrehungs-

Fig. 82.

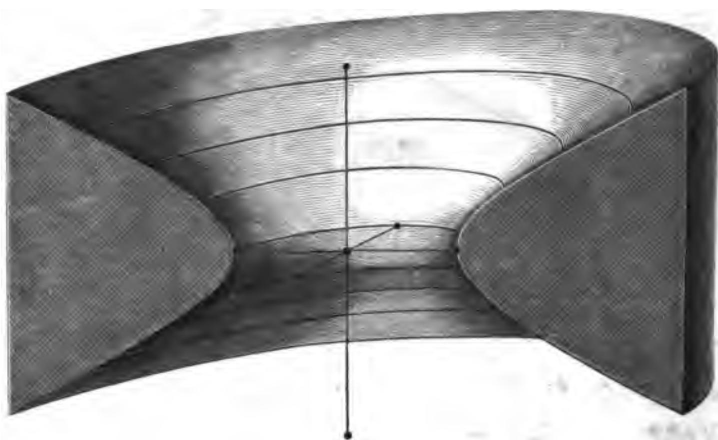
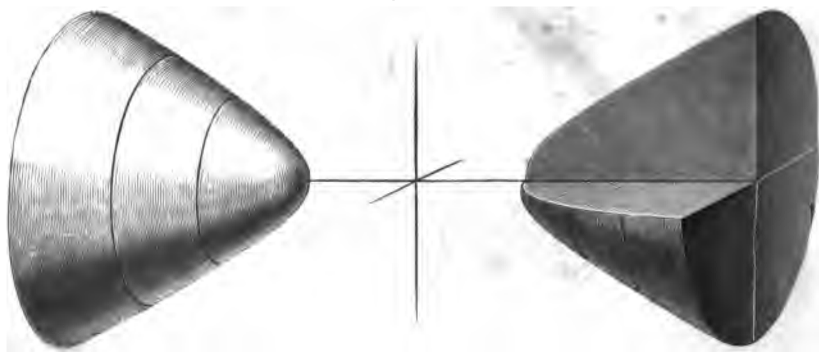


Fig. 83.



hyperboloid ist in Fig. 83 dargestellt, und zwar gleichfalls für $A = 1{,}5$ und $B = 0{,}8^{\text{cm}}$.

Drittes Kapitel.

Durchschneidung krummer Oberflächen mit ebenen Flächen.

Einfach und doppelt gekrümmte Curven. Gleichwie die Combination der Gleichungen zweier ebenen Flächen die Durchschnittslinie derselben darstellt, so wird allgemein die Combination zweier Gleichungen mit den Variabeln x, y und z die Durchschnittslinie repräsentiren, in welcher sich die beiden durch die fraglichen Gleichungen definirten krummen Flächen schneiden. 48

Es seien z. B.

$$f(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$F(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die Gleichungen zweier krummen Oberflächen, so wird die Gesammtheit aller Punkte, deren Coordinaten zugleich den beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge leisten, die Durchschnittslinie der beiden Flächen (1) und (2) sein.

Im Allgemeinen wird die Durchschnittslinie zweier krummen Oberflächen nicht in einer Ebene enthalten sein, und in diesem Falle haben wir mit einer Curve doppelter Krümmung zu thun. Curven einfacher Krümmung sind solche Curven, deren Punkte sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen.

Curven einfacher Krümmung entstehen jederzeit bei Durchschneidung einer krummen Oberfläche mit einer Ebene.

Wir müssen uns hier auf die Betrachtung der wichtigsten Fälle von Durchschneidung krummer Flächen mit ebenen beschränken.

Durchschnitt krummer Oberflächen mit den Coordinatenebenen. Der einfachste Fall der Durchschneidung krummer Oberflächen mit Ebenen ist derjenige, in welchem die schneidende Ebene eine Coordinatenebene selbst ist, weil in diesem Falle ihre Gleichung eine sehr einfache Gestalt annimmt, wie wir aus §. 37 wissen. 49

Es sei

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung einer krummen Oberfläche, so hat man in derselben nur

$$x = 0$$

zu setzen, um die Gleichung der Durchschnittslinie der krummen Oberfläche mit der Ebene der zy zu finden. Man hat dagegen in Gleichung (1)

$$z = 0$$

oder

$$y = 0$$

zu setzen, wenn man die Gleichung der Curve haben will, in welcher die krumme Oberfläche durch die Ebene der xy oder durch die Ebene der xz geschnitten wird.

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

1. Die Gleichung eines geraden Kegels ist nach §. 45

$$r^2 (z - c)^2 = (x^2 + y^2) c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z = 0$, so kommt

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Der Durchschnitt des Kegels mit der Ebene der xy ist also, wie vorauszusehen war, ein Kreis vom Halbmesser r.

Setzen wir in Gleichung (2) $y = 0$, so kommt

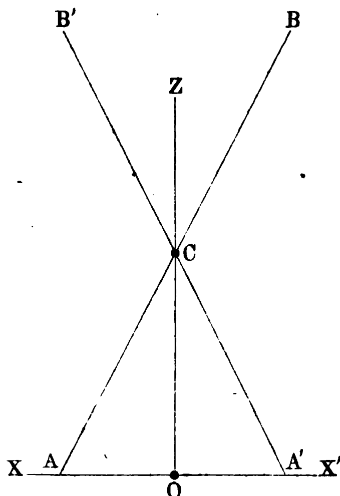
$$r^2 (z - c)^2 = x^2 c^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{c^2} (z - c)^2$$

oder

$$x = \pm \frac{r}{c} (z - c) \quad . \quad . \quad (3)$$

Fig. 84.



Diese Gleichung repräsentirt aber, je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, die gerade Linie AB oder $A'B'$, Fig. 84, in welcher $OA = OA' = r$ und $OC = c$ aufgetragen ist. Wenn also die Axe eines geraden Kegels mit der Axe der z zusammenfällt, so ist der Durchschnitt des Kegels mit der Ebene der zx ein System zweier geraden Linien, die sich unter einem Winkel schneiden, dessen Werth von den Größen r und c abhängt.

2. Wie wir in §. 48 gesehen haben, ist

$$A^2(y^2 + z^2) - B^2x^2 = -A^2B^2$$

die Gleichung eines Umdrehungshyperboloids, Fig. 83, dessen Umdrehungsaxe mit der Axe der x zusammenfällt. Um die Gleichung der Curve zu erhalten, in welcher dieses Hyperboloid von der Ebene der xy geschnitten wird, hat man in obiger Gleichung nur $z = 0$ zu setzen und erhält dann für die gesuchte Gleichung der Durchschnittscurve

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

welches bekanntlich die Gleichung einer Hyperbel ist.

Durchschnitte krummer Oberflächen mit Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel laufen. 50 Setzen wir in der Gleichung einer krummen Oberfläche $x = \alpha$ oder $y = \beta$ oder $z = \gamma$, wo α, β und γ beliebige constante Größen bezeichnen, so erhalten wir die Gleichung der Durchschnittscurve der krummen Oberfläche mit einer Ebene, welche in einem bestimmten Abstande mit einer der Coordinatenebenen parallel läuft. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

I. Es ist z. B. die Gleichung einer Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

setzen wir

$$x = \alpha \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

so erhalten wir

$$y^2 + z^2 = R^2 - \alpha^2 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

als Gleichung der Durchschnittscurve der Kugel mit einer Ebene, welche parallel der Ebene der yz um die Länge α von ihr absteht. Diese Gleichung (3) ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Radius ist $\sqrt{R^2 - \alpha^2}$. Je größer also α wird, d. h. je weiter sich die schneidende Ebene vom Mittelpunkt der Kugel entfernt, desto kleiner wird der Kreishalbmesser $\sqrt{R^2 - \alpha^2}$; er wird gleich 0 für $\alpha = R$ und imaginär für $\alpha > R$.

Ebenso findet man, daß der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene, welche der Ebene der xy oder der Ebene der zy parallel läuft, stets ein Kreis ist.

Um den Verlauf einer krummen Oberfläche zu übersehen, ist es sehr zweckmäßig, sie durch eine Reihe von Ebenen durchschnitten zu denken, welche den Coordinatenebenen parallel laufen, und für jede dieser Durchschnittsebenen die Gestalt der Durchschnittscurve zu ermitteln.

II. Die Gleichung eines geraden Kegels, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt, ist

$$r^2(z - c)^2 = (x^2 + y^2)c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Daß der Durchschnitt dieses Kegels mit Ebenen, welche der Ebene der xy parallel laufen, stets ein Kreis sein muß, läßt sich leicht voraussehen und nachweisen, wenn man in Gleichung (4) $z = \gamma$ setzt.

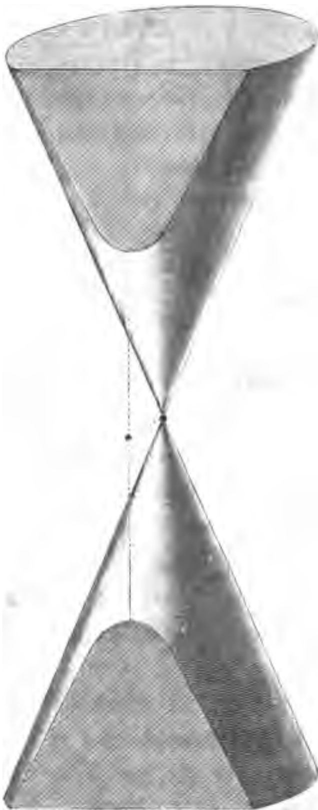
Die Gleichung einer Ebene, welche parallel läuft mit der Ebene der xz, ist

$$y = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Combiniren wir Gleichung (4) mit Gleichung (5), d. h. setzen wir in Gleichung (4) $y = \beta$, so kommt

$$r^2(z - c)^2 = x^2c^2 + \beta^2c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Fig. 85.



als Gleichung der Durchschnittscurve der besagten Ebene mit dem Kegel. Um diese Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen, wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen, und zwar wollen wir ihn in die Höhe der Spitze des Kegels legen, ihn also um die Länge c hinaufschieben, was dadurch geschieht, daß wir in Gleichung (6) z an die Stelle von $z - c$ setzen. Es kommt alsdann

$$r^2z^2 = x^2c^2 + \beta^2c^2$$

$$x^2c^2 - r^2z^2 = - \beta^2c^2 \quad . \quad (7)$$

welches offenbar die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Hauptaxe in die Richtung der Axe der z fällt.

Es sei z. B. $r = 2^{cm}$, $c = 5^{cm}$ und $\beta = 1^{cm}$, so wird aus Gleichung (7)

$$25\,x^2 - 4\,z^2 = - 25 \quad . \quad (8)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so ergiebt sich $z^2 = {}^{25}/_4$, $z = {}^5/_2$ als Werth der Hauptaxe der Hyperbel und demnach reducirt sich die Gleichung (8) auf

$${}^{25}/_4\,x^2 - z^2 = - {}^{25}/_4,$$

woraus man ersieht, daß die Nebenaxe der fraglichen Hyperbel gleich 1 ist. Fig. 85 stellt den Kegel sammt der Durchschnittscurve für die Werthe $r = 2^{cm}$, $c = 5^{cm}$ und $\beta = 1^{cm}$ dar.

III. Die Gleichung der Durchschnittscurve des Umdrehungsellipsoids

$$B^2(x^2 + y^2) + A^2z^2 = A^2B^2 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

mit der Ebene

$$y = \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

welche der Ebene der xz parallel läuft, ergiebt sich, wenn man in Gleichung (9) β für y substituirt; es kommt alsdann

$$B^2x^2 + A^2z^2 = B^2(A^2 - \beta^2) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

was offenbar die Gleichung einer Ellipse ist, deren große Axe gleich ist

$$\sqrt{A^2 - \beta^2},$$

während die kleine Axe der Ellipse ist

$$\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - \beta^2}.$$

Für das Ellipsoid, welches Fig. 80 dargestellt ist, haben wir $A = 3^{cm}$, $B = 2^{cm}$. Wenn nun die mit der Ebene der xz parallel laufende schneidende Ebene um 2^{cm} von der Umdrehungsaxe des Ellipsoids entfernt, also $\beta = 2^{cm}$ ist, so erhalten wir für die beiden Axen der Durchschnittsellipse $\sqrt{5}$ und $\frac{2}{3}\sqrt{5}$.

IV. Man soll die Gestalt der Curven ermitteln, in welchen das Umdrehungshyperboloid

$$A^2z^2 - B^2(x^2 + y^2) = - A^2B^2 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

(siehe Fig. 82 §. 48) durch eine mit der Ebene der xz parallelen Ebene

$$y = \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

geschnitten wird. Setzt man in Gleichung (12) $y = \beta$, so kommt für die gesuchte Gleichung der Durchschnittscurve

$$A^2z^2 - B^2x^2 = - B^2(A^2 - \beta^2) \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Für $\beta < A$ stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar, deren Hauptaxe in die Richtung der Axe der x fällt. Für die Hauptaxe dieser Hyperbel ergiebt sich der Werth

$$\sqrt{A^2 - \beta^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

für die Nebenaxe aber

$$\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - \beta^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Für $\beta = A$ reducirt sich die Gleichung (14) auf

$$A^2z^2 = B^2x^2$$

$$z = \pm \frac{B}{A} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Diese Gleichung stellt ein System zweier geraden Linien dar, welche mit der Axe der x einen Winkel machen, dessen trigonometrische Tangente für die eine $+\frac{B}{A}$, für die andere aber $-\frac{B}{A}$ ist. Der Winkel der beiden geraden Linien wird durch die Axe der x halbirt.

Für $\beta > A$ wird das Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Gleichung (14) positiv. Aendern wir in Gleichung (14) alle Vorzeichen, so kommt

$$B^2x^2 - A^2z^2 = -B^2(\beta^2 - A^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

eine Gleichung, welche, so lange $\beta > A$, eine Hyperbel darstellt, deren Hauptaxe mit der Axe der z zusammenfällt. Die Hauptaxe dieser Hyperbel ist

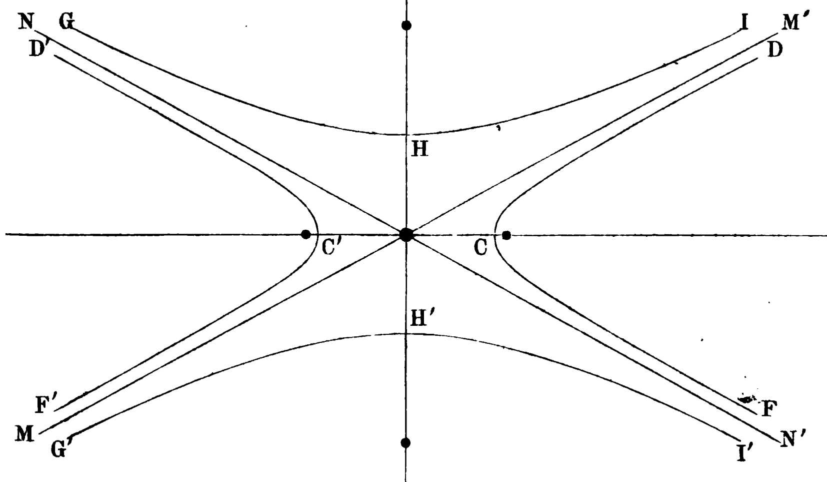
$$\sqrt{\beta^2 - A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

die Nebenaxe aber

$$\frac{A}{B}\sqrt{\beta^2 - A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Aus der Betrachtung der Axenwerthe bei (15) und (16), so wie der bei (19) und (20) ergiebt sich, daß die Asymptoten sämmtlicher

Fig. 86.



Durchschnittshyperbeln denselben Winkel mit der Axe der x machen, nämlich einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{B}{A}$ ist.

Für das in Fig. 82 dargestellte Umdrehungshyperboloid ist $A = 1{,}5^{cm}$, $B = 0{,}8^{cm}$, also 0,533 die trigonometrische Tangente, welche die Asymptoten sämmtlicher Durchschnittshyperbeln mit der Axe der x machen. In Fig. 86 ist MM' und NN' das den Werthen $A = 1{,}5$ und $B = 0{,}8$ entsprechende Asymptotensystem. Diese beiden Linien stellen zugleich den Durchschnitt des Hyperboloids mit einer Ebene dar, welche parallel mit der Umdrehungsaxe um $1{,}5^{cm}$ von derselben entfernt ist.

Die Hyperbel DCF, $D'C'F'$ entspricht dem Werthe $\beta = 1^{cm}$, während die Hyperbel GHJ, $G'H'J'$ dem Werthe $\beta = 2^{cm}$ entspricht; für die erstere ist die Hauptaxe $1{,}12^{cm}$, die Nebenaxe $0{,}597^{cm}$; für die Hyperbel GHJ, $G'H'J'$ ist die Hauptaxe $1{,}32^{cm}$, die Nebenaxe aber $2{,}475^{cm}$.

Die Kegelschnitte. Mit dem Namen der Kegelschnitte be- 51
zeichnet man die Durchschnittscurven eines (geraden) Kegels (von kreisförmiger Basis) und irgend einer ebenen Fläche. In den folgenden Zeilen sollen die Gleichungen dieser Curven entwickelt werden.

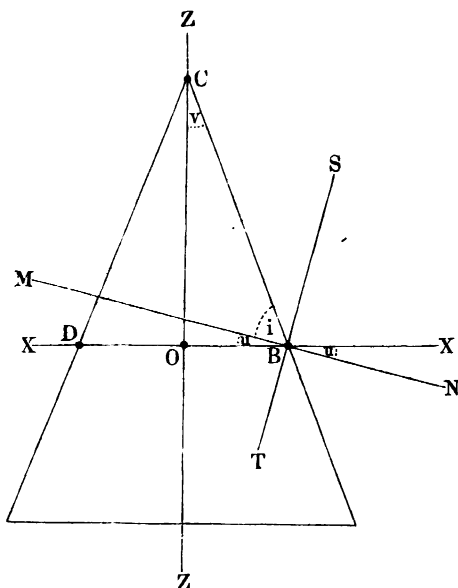
Nach §. 44 ist

$$(y^2 + x^2)\, c^2 = r^2 (z - c)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis.

In Fig. 87 ist der Durchschnitt dieses Kegels mit der Ebene der xz dargestellt. O ist der Anfangspunkt der Coordinaten; $OB = OD = r$ ist der Radius des Leitkreises; $CO = c$ ist die Höhe der Kegelspitze über der Ebene des Leitkreises, welche zugleich zur Ebene der xy genommen ist.

Fig. 87.



Der Kegel soll nun von einer Ebene durchschnitten werden, die wir als durch den Punkt B gehend und auf der Ebene der xz rechtwinkelig stehend annehmen wollen; diese Ebene schneidet die Ebene der xz in einer geraden Linie MN.

Um die Gleichung der Curve zu finden, in welcher die besprochene Ebene die Kegeloberfläche schneidet, ist es zweckmäßig, eine Transformation der Coordinaten in der Weise vorzunehmen, daß die schneidende Ebene selbst zu einer Coordinatenebene wird. Nehmen wir den Punkt B, Fig. 87, zum Anfangspunkt der neuen Coordinaten, die wir mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bezeichnen wollen. — MN sei die Axe der $\mathfrak{x}$; ST, in der alten Ebene der xz rechtwinkelig auf MN liegend, sei die Axe der $\mathfrak{z}$ und die in B rechtwinkelig auf MN und ST stehende Linie sei die Axe der $\mathfrak{y}$. — Die Axe der $\mathfrak{y}$ ist also der Axe der y parallel.

Bezeichnen wir mit x, y und z die Coordinaten irgend eines Punktes, bezogen auf das erste Axensystem; mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf das neue System, so finden zwischen den alten und den neuen Coordinaten folgende Beziehungen statt:

$$y = \mathfrak{y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

da ja die Ebene der xz mit der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ zusammenfällt. Ferner aber ist, analog den Gleichungen (4) in §. 24

$$x = r + \mathfrak{z}\,.\,sin.u + \mathfrak{x}\; cos.u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

$$z = \mathfrak{z}\; cos.u - \mathfrak{x}\; sin.u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

wenn man mit u den Winkel bezeichnet, welchen die Axe der $\mathfrak{x}$ mit der Axe der x macht. Substituirt man in Gleichung (1) für x, y und z ihre Werthe bei (b), (a) und (c), so kommt

$$[\mathfrak{y}^2 + (r + \mathfrak{z}\, sin.u + \mathfrak{z}\, cos.u)^2]\, c^2 = r^2 (\mathfrak{z}\, cos.u - \mathfrak{x}\, sin.u - c)^2 \quad . \quad (2)$$

Als Gleichung des Kegels, bezogen auf das zweite Axensystem, für welches die Gleichung der schneidenden Ebene (der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) ist

$$\mathfrak{z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Combinirt man die Gleichungen (2) und (3), so erhält man für die Gleichung der Durchschnittscurve

$$[\mathfrak{y}^2 + (r + \mathfrak{x}\, cos.u)^2]\, c^2 = r^2\, (c + \mathfrak{x}\, sin.u)^2 \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vom zweiten Grade ist, so ersieht man ohne Weiteres, daß der Durchschnitt des Kegels mit einer Ebene entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel sein muß.

Um besser übersehen zu können, mit welcher dieser drei Curven man in bestimmten Fällen zu thun hat, wollen wir mit Gleichung (4) noch einige Umwandlungen vornehmen. Setzen wir den Abstand $CB = b$; bezeichnen wir den Winkel BCO, welchen die Generatrix mit der Axe des Kegels macht, mit v, so ist

$$r = b \,.\, sin.\, v$$
$$c = b \,.\, cos.\, v$$

und diese Werthe für r und c in Gleichung (4) gesetzt, giebt

$$[\mathfrak{y}^2 + (b\, sin.\, v + \mathfrak{x}\, cos.\, u)^2]\, cos.\, v^2 = (b\, cos.\, v + \mathfrak{x}\, sin.\, u)^2\, sin.\, v^2.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so kommt

$$\mathfrak{y}^2\ cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, (cos.\, u^2\ cos.\, v^2 - sin.\, u^2\ sin.\, v^2)$$
$$+ 2\, b\mathfrak{x}\, sin.\, v \,.\, cos.\, v\ (cos.\, u\ cos.\, v - sin.\, u\ sin.\, v) = 0$$

oder

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, (cos.\, u\, cos.\, v - sin.\, u\, sin.\, v)\ (cos.\, u\, cos.\, v + sin.\, u\, sin.\, v)$$
$$+ b\mathfrak{x} \,.\, 2\, sin.\, v \,.\, cos.\, v \,.\, cos.\, (u + v) = 0$$

oder endlich

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, cos.\, (u + v)\ cos.\, (u - v) + b\mathfrak{x}\, sin.\, 2\, v\, cos.\, (u + v) = 0 \quad (5)$$

Bezeichnet man mit i den Winkel MBC, welchen die schneidende Ebene mit der Kegelkante CB macht, so ist, wie leicht aus der Fig. 87 zu ersehen ist,

$$i + u + v = 90^0,$$

also

$$u + v = 90^0 - i$$
$$cos.\, (u + v) = sin.\, i$$

und ferner

$$u - v = 90^0 - i - 2\, v,$$

also

$$cos.\, (u - v) = sin.\, (i + 2\, v).$$

Substituirt man diese Werthe von $cos.\, (u + v)$ und $cos.\, (u - v)$ in Gleichung (5), so kommt

$$\mathfrak{y}^2\ cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, sin.\, i\ sin.\, (i + 2\, v) + b\, \mathfrak{x}\, sin.\, 2\, v \,.\, sin.\, i = 0 \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichung ist die Gleichung einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel, je nachdem

$$1. \ldots i < 180^0 - 2\, v$$

oder

$$2. \ldots i = 180^0 - 2\, v$$

oder

$$3. \ldots i > 180^0 - 2\, v.$$

Erster Fall. Wenn Winkel MBC, Fig. 88 (a. f. S.), also $i < 180 - 2v$, so kann man setzen: $i = 180 - 2v - t$, also $i + 2v = 180 - t$ und $sin.\, (i + 2v) = sin.\, t$. Danach geht Gleichung (6) über in

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, sin.\, i\ sin.\, t + b\, \mathfrak{x}\ sin.\, i\ sin.\, 2\, v = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\mathfrak{x} = X - \frac{b\, sin.\, 2\, v}{2\, sin.\, t}$$

und

$$\mathfrak{y} = Y,$$

so geht sie über in

$$Y^2 (cos.\,v)^2 + X^2\, sin.\,i\ sin.\,t = \frac{b^2 (sin.\,v)^2\ sin.\,i}{4\ sin.\,t} \quad . \quad . \quad (7)$$

Fig. 88.

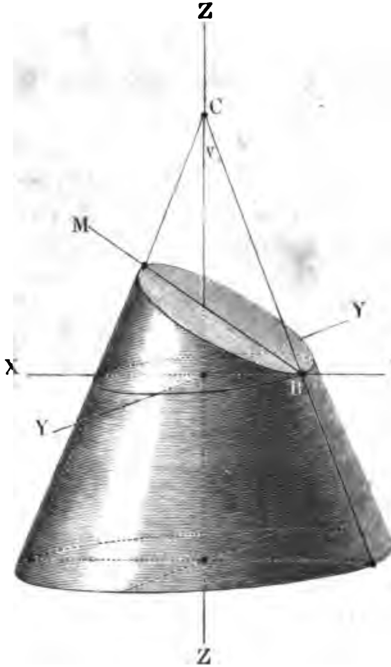
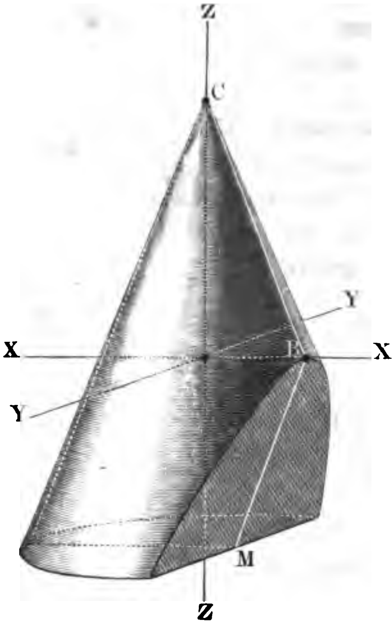


Fig. 89.



welches offenbar die Gleichung einer Ellipse ist; denn setzen wir

$$N.A^2 = (cos.\,v)^2$$

$$N.B^2 = sin.\,i\ sin.\,t$$

$$N.A^2 B^2 = \frac{b^2 (sin.\,v)^2\ sin.\,i}{4\,sin.\,t},$$

so ergiebt sich

$$N = \frac{4\,(sin.\,t)^2 . (cos.\,v)^2}{b^2 (sin.\,v^2)}.$$

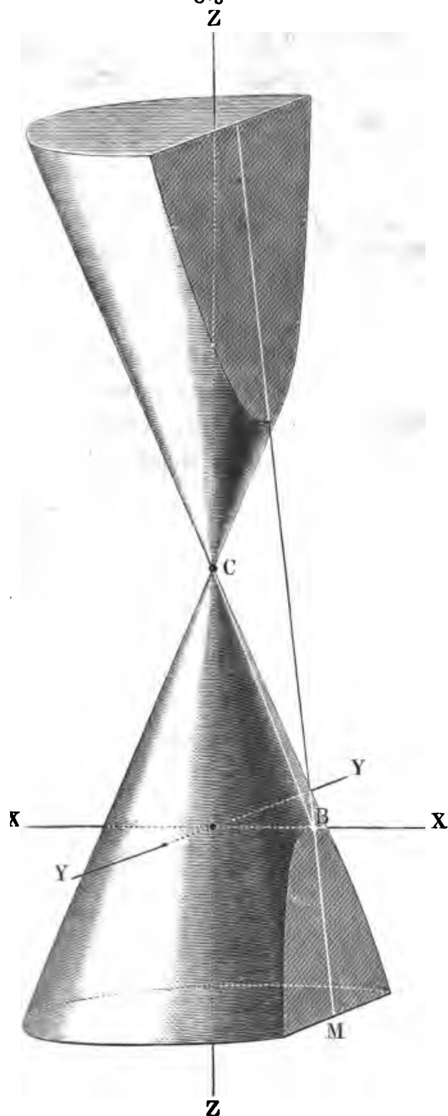
Dividirt man mit diesem Werth von N jedes Glied der Gleichung (7), so geht dieselbe über in

$$\frac{b^2 (sin.\,v)^2}{4\,(sin.\,t)^2}\ Y^2 + \frac{b^2\,sin.\,i\ (sin.\,v)^2}{4.\,sin.\,t\,.\,(cos.\,v)^2}\ X^2 = \frac{b^4 (sin.\,v)^4\ sin.\,i}{4.4.(sin.\,t)^3\ (cos.\,v)^2} \quad (8)$$

wir haben also mit einer Ellipse zu thun, für welche

$$A = \frac{b.\sin.v}{2\sin.t}$$

Fig. 90.



und

$$B = \frac{b.\sin.v\sqrt{\sin.i}}{2.\cos.v\sqrt{\sin.t}}.$$

Zweiter Fall. Wenn Winkel MBC also $i = 180 - 2v$ ist, wie in Fig. 89, so ist die durch B gelegte Schnittfläche mit der gegenüberliegenden Kegelkante CD, Fig. 87, parallel, oder mit anderen Worten, die schneidende Ebene macht mit der Kegelaxe einen Winkel, welcher gleich v, also gleich dem Winkel ist, welchen die Generatrix mit der Axe macht. Für diesen Fall ist $i + 2v = 180^0$, also $\sin.(i + 2v) = 0$; danach reducirt sich die Gleichung (6) auf

$$y^2 \cos.v^2 + b x \sin.2v \sin.i = 0$$

$$y^2 = -\frac{b \sin.2v.\sin.i}{\cos.v^2} x \quad . (9)$$

Die Gleichung einer Parabel, welche sich von B aus nach der negativen Seite der x hin erstreckt.

Dritter Fall. Für

$$i > 180 - 2v$$

(Winkel CBM, Fig. 90, größer als $180 - 2v$) können wir

$$i = 180 - 2v + t$$

setzen. Alsdann wird

$$i + 2v = 180^0 + t$$

und

$$\sin.(i + 2v) = -\sin.t.$$

Substituirt man in Gleichung (6) den Werth $-\sin.t$ für $\sin.(i + 2v)$, so gelangt man nach Durch-

führung ähnlicher Umwandlungen, wie sie im ersten Falle vorgenommen wurden, zu der Gleichung

$$\frac{b^2\,(sin.\,v)^2}{4\,(sin.\,t)^2}\,Y^2 - \frac{b^2\,.\,sin.\,i\,(sin.\,v)^2}{4\,sin.\,t\,(cos.\,v)^2}\,X^2 = -\frac{b^4\,.\,(sin.\,v)^4\,sin.\,i}{4\,.\,4\,.\,(sin.\,t)^3\,(cos.\,v)^2} \quad (10)$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Axen sind

$$A = \frac{b\,sin.\,v}{2\,.\,sin.\,t}$$

und

$$B = \frac{b\,.\,sin.\,v\,\sqrt{sin.\,i}}{2\,.\,cos.\,v\,\sqrt{sin.\,t}}.$$

In diesem Falle trifft die schneidende Fläche nicht bloß den unteren Theil des Kegels, sondern auch seine über die Spitze C hinausgehende Verlängerung desselben, wie man aus Fig. 90 ersieht, so daß man eine Curve von zwei getrennten Zweigen erhält.

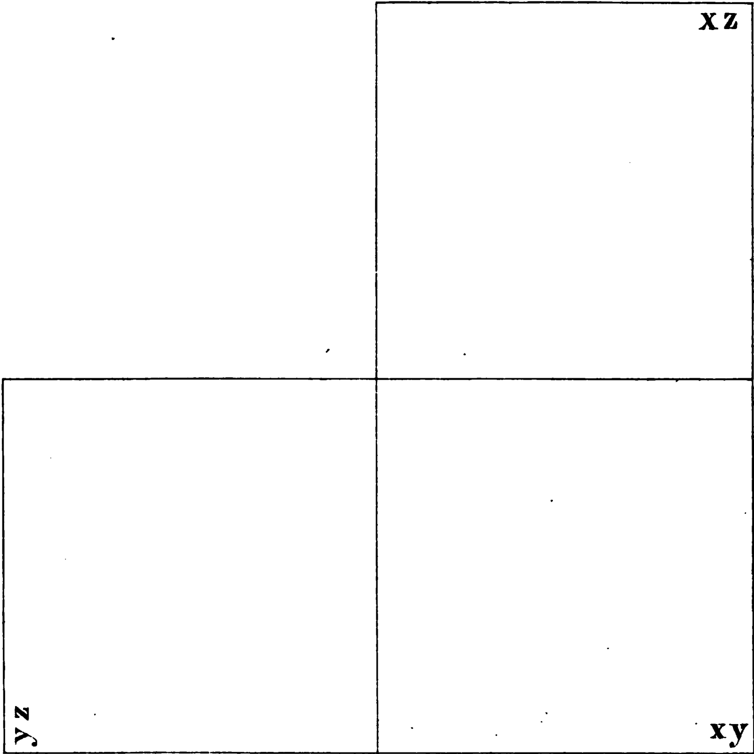
So ist denn der Beweis geführt, daß der Durchschnitt eines Kegels und einer ebenen Fläche, je nach der Lage der schneidenden Ebene entweder eine Ellipse, oder eine Parabel oder eine Hyperbel ist, weshalb denn auch diese drei Curven unter dem gemeinschaftlichen Namen der Kegelschnitte zusammengefaßt wurden.

Alphabetisches Sachregister.

Druckfehler.

Seite 45 muß die zweite der Gleichungen bei (4) heißen:

$$x = a + \mathfrak{y}\,\sin.\alpha + \mathfrak{x}\,\cos.\alpha.$$


x z
y z
x y

